

# 两相系统的燃烧、 爆炸和爆轰

---

范宝春 著

国防工业出版社

TK123  
F07

435835

# 两相系统的燃烧、爆炸和爆轰

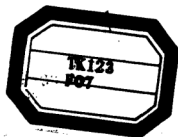
范宝春 著



00435835

国防工业出版社

· 北京 ·



图书在版编目(CIP)数据

两相系统的燃烧、爆炸和爆轰/范宝春著. —北京:国防工业出版社, 1998. 11

ISBN 7-118-01826-0

I. 两… II. 范… III. 两相系统-概论 IV. TK123

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 20263 号

DZ19/04

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

河北三河市腾飞胶印厂

新华书店经售

\*

开本 850×1168 1/32 印张 10 $\frac{3}{4}$  277 千字

1998 年 11 月第 1 版 1998 年 11 月北京第 1 次印刷

印数:1—1500 册 定价:20.00 元

---

(本书如有印装错误,我社负责调换)

## 内 容 简 介

本书从理论上较全面系统地论述了两相系统的燃烧问题。基于统一的两相反应流方程,分析和讨论了湍流燃烧、爆炸和爆轰,并介绍了它们各自的存在条件和特点,以及相互联系与转换。

全书共分八章。书中融入了作者多年的研究成果,在出版前书稿曾以教材形式在教学中使用,并根据有关方面的意见进行了修改和充实。

本书可作为有关专业的科技人员和研究人员的参考书,也可作为高等院校本科师生、研究生的参考教材。



## 致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金  
评审委员会

## 国防科技图书出版基金 第二届评审委员会组成人员

名誉主任委员 怀国模

主任委员 黄 宁

副主任委员 殷鹤龄 高景德 陈芳允

曾 铎

秘 书 长 刘琯德

委 员 尤子平 朱森元 朵英贤

(按姓氏笔划为序) 刘 仁 何庆芝 何国伟

何新贵 宋家树 张汝果

范学虹 胡万忱 柯有安

侯 迁 侯正明 莫梧生

崔尔杰

## 前 言

为讨论一个古老的课题而着手写这本书的时候,首先想着如何将一些新的内容奉献给读者,倘若真使读者感到新意,笔者将无限欣慰。

燃烧是一个与人类的联系由来已久、非常复杂的现象,虽经长达几千年的研究探索,仍有许多未解疑团。同种燃料可以缓慢燃烧,也可以加速燃烧、爆炸甚至爆轰。如果人们不能有效地控制其燃烧方式,则可能导致灾难性后果。

经济的迅猛发展引起工业和交通的诸多变化,如新型产业的出现、新技术新工艺的采用、生产规模的扩大、生产布局的紧凑化以及超大型容器的使用等,这些都伴随着火灾或爆炸灾害的潜在危险。近年来工业灾害不断发生,其规模和危害程度日趋严重,从而引起人们的关注。另一方面,民用燃料的爆炸对目标致命的摧毁也给兵器研制提供了新思路,例如燃料—空气炸药便以民用燃料为基本原料。

鉴于此,本书力图从理论上阐述两相系统的燃烧问题。基于统一的两相反应流方程,讨论湍流燃烧、爆炸和爆轰,介绍它们各自的存在条件和特点以及相互联系与转换。全书共八章:第一章概论,介绍化学反应流的基本概念和基本方程以及燃烧的基本方式;第二章湍流燃烧,介绍湍流模型、湍流燃烧的概率密度分布函数,旋涡破碎模型和统计模型;第三章两相湍流燃烧,介绍两相反应流基本方程,两相湍流燃烧的单流体、多流体和颗粒轨道模型;第四章液滴燃烧,除介绍古典模型外,还讨论古典模型的推广,如液滴瞬态非定常燃烧、多组元液滴燃烧、对流燃烧和超临界燃烧等;第五章粉尘燃烧,介绍无孔颗粒、多孔颗粒、金属颗粒和含挥发分颗

粒的燃烧;第六章两相爆炸,介绍无火焰阵面的均态热爆炸,密闭容器中低速火焰导致的爆炸以及直管或障碍物诱导的湍流加速火焰和由此生成的激波;第七章两相爆轰,主要指悬浮粉尘或液滴中的爆轰波,讨论激波与粉尘或液滴的相互作用、爆轰波的一维结构和爆速的计算;第八章薄膜爆轰,即壁面液体薄膜或沉积粉尘导致的爆轰,讨论燃烧边界层、爆轰波的二维结构和爆速的计算。

特别要感谢国家自然科学基金委员会,它使作者有机会在参加重大项目“工业爆炸灾害力学研究”的过程中查阅大量资料和从事有价值的科学研究,本书的内容大都与之有关。本书主要取材于国内外学者们的文章与著作以及作者的研究成果。书稿作为教材曾在课堂中使用,并得以修改与充实。这次有幸付印出版,恳请更多的读者批评赐教。

作 者

1997 年 4 月于南京

# 目 录

第一章 燃烧概论 .....	1
1.1 基本概念和基本方程 .....	1
1.1.1 基本概念 .....	1
1.1.2 基本方程 .....	5
1.1.3 火焰 .....	8
1.2 定常燃烧 .....	10
1.2.1 慢燃 .....	10
1.2.2 快燃 .....	15
1.2.3 爆轰波 .....	18
1.3 非定常燃烧 .....	25
1.3.1 弱激波诱导的非定常燃烧 .....	25
1.3.2 非定常诱导区 .....	27
1.3.3 准定常燃烧区 .....	28
第二章 湍流燃烧 .....	31
2.1 湍流 .....	31
2.1.1 涡量输运方程 .....	31
2.1.2 湍流 .....	36
2.2 湍流模型 .....	41
2.2.1 Reynolds 分解 .....	41
2.2.2 湍流模型 .....	44
2.2.3 可压缩湍流 .....	50
2.3 湍流燃烧 .....	54
2.3.1 反应速率的直接封闭 .....	55
2.3.2 概率密度分布函数(PDF) .....	57
2.3.3 旋涡破碎模型 .....	65

2.3.4 统计模型 .....	68
<b>第三章 两相湍流燃烧</b> .....	72
3.1 两相流守恒方程 .....	72
3.1.1 体积平均值及其守恒方程 .....	72
3.1.2 相间输运 .....	77
3.2 颗粒悬浮流 .....	84
3.2.1 混合物热力学 .....	84
3.2.2 颗粒受力 .....	89
3.2.3 两相热传导 .....	94
3.2.4 颗粒悬浮流守恒方程 .....	97
3.3 两相湍流燃烧 .....	99
3.3.1 均相模型 .....	99
3.3.2 分离流模型 .....	105
<b>第四章 液滴燃烧</b> .....	121
4.1 扩散 .....	121
4.1.1 摩尔流率 .....	121
4.1.2 Fick 定律 .....	122
4.1.3 气体中的扩散系数 .....	125
4.2 液滴蒸发 .....	127
4.2.1 液滴蒸发模型 .....	127
4.2.2 $d^2$ 定律 .....	129
4.2.3 温度分布 .....	130
4.2.4 Clausius—Clapeyron 方程 .....	131
4.3 液滴燃烧 .....	132
4.3.1 Shvab—Zeldovich 变换 .....	132
4.3.2 瞬时反应模型 .....	134
4.4 古典模型的修正 .....	138
4.4.1 瞬态过程 .....	138
4.4.2 多组元液滴 .....	141
4.4.3 对流效应 .....	145
4.4.4 超临界燃烧 .....	150
<b>第五章 粉尘燃烧</b> .....	153

5.1	多孔颗粒 .....	153
5.1.1	孔结构 .....	153
5.1.2	孔内扩散 .....	155
5.1.3	孔内流动 .....	159
5.1.4	孔内反应 .....	161
5.2	外部流场 .....	164
5.2.1	Stefan 流 .....	164
5.2.2	浓度和温度分布 .....	165
5.3	无孔颗粒燃烧 .....	167
5.3.1	缩球模型 .....	167
5.3.2	缩核模型 .....	172
5.4	多孔颗粒燃烧 .....	176
5.4.1	全气化模型 .....	176
5.4.2	非全气化模型 .....	182
5.5	颗粒的气相燃烧 .....	186
5.5.1	含挥发分的颗粒燃烧 .....	186
5.5.2	金属颗粒燃烧 .....	189
第六章	两相爆炸 .....	198
6.1	均态热爆炸 .....	198
6.1.1	孤立物系 .....	199
6.1.2	封闭物系 .....	201
6.1.3	敞开物系 .....	203
6.1.4	两相体系 .....	207
6.2	密闭容器中低速燃烧导致的爆炸 .....	209
6.2.1	气相爆炸 .....	209
6.2.2	粉尘爆炸 .....	218
6.2.3	气云爆炸 .....	225
6.3	火焰诱导激波 .....	227
6.3.1	匀速火焰诱导的激波 .....	227
6.3.2	加速火焰诱导的激波 .....	236
6.4	湍流加速火焰 .....	240
6.4.1	管内火焰加速 .....	240



6.4.2 障碍物导致的火焰加速 .....	245
<b>第七章 两相爆轰</b> .....	255
7.1 两相爆轰波一般特性 .....	256
7.1.1 颗粒悬浮流中的正激波 .....	256
7.1.2 两相爆轰波 .....	261
7.2 气云爆轰 .....	265
7.2.1 激波作用下液滴的变形和雾化 .....	265
7.2.2 激波作用下液滴的点火与局部爆炸 .....	274
7.2.3 一维 ZND 模型 .....	280
7.3 粉尘爆轰 .....	284
7.3.1 一维 ZND 模型 .....	284
7.3.2 双阵面粉尘爆轰 .....	292
<b>第八章 薄膜爆轰</b> .....	296
8.1 反应边界层 .....	296
8.1.1 边界层方程 .....	296
8.1.2 自模拟解 .....	298
8.1.3 壁面条件 .....	301
8.1.4 积分关系式 .....	303
8.2 液体薄膜爆轰 .....	304
8.2.1 燃烧边界层 .....	304
8.2.2 壁面条件 .....	307
8.2.3 Chapman-Jouguet 条件 .....	308
8.3 粉尘薄膜爆轰 .....	312
8.3.1 燃烧边界层 .....	312
8.3.2 Chapman-Jouguet 条件 .....	321
<b>参考文献</b> .....	323

# 第一章 燃烧概论

燃烧是一种复杂的物理化学现象,相同组分可燃混合物在不同条件下可以具有迥异的燃烧方式,其燃烧速度可在每秒几米至几千米的范围内变化。

燃烧是带化学反应的流动,因此可用一组反应流守恒方程来描述,燃烧方式的差异与此类方程的固有属性有关。方程具有强烈的非线性,通常不易求解。为便于讨论,本章在不失问题本质的前提下,根据不同情况,对方程进行简化并据此讨论各种燃烧方式所具有的特点。

本章内容包括:化学反应流的基本概念和基本方程;定常燃烧,包括慢燃、快燃和激波诱导的燃烧,即爆轰波;非定常燃烧,讨论激波与火焰之间的相互影响。

## 1.1 基本概念和基本方程

### 1.1.1 基本概念

#### 一、平衡体系

用边界将一定量的物质从环境中分离出来便构成一个热力学体系。这里的边界可以是容器一类的实际物理边界,也可以是虚构的任意封闭表面。体系可以通过边界与环境相互作用,根据这种作用可将体系分为三类:

(1)孤立体系 体系与环境之间既无能量交换,也无质量交换;

(2) 封闭体系 体系与环境之间仅有能量交换, 而无质量交换;

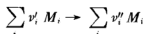
(3) 敞开体系 体系与环境之间既有能量交换, 也有质量交换。

在不受外界影响时, 如果体系的宏观上可测量的性质如压力、温度、体积等皆不随时间而变化, 称体系处于热力学平衡态, 可用状态函数来描述。状态函数分为两类: 强度性质和容量性质, 前者不具有可加性, 如压力、温度和密度等, 后者则具有可加性, 整体的值等于各部分值的和, 如内能、焓和熵等。两个容量性质相除便得到强度性质, 例如单位质量的内能称为比内能为强度性质, 类似的还有比焓、比熵和比容等等。

流动体系不能严格地满足热力学平衡的要求, 为描述此类体系的状态, 须对平衡概念作某些推广。流体的连续介质模型将流体质点视作数学上的点, 但微观上则认为该点内部包含不可计数的分子以构成热力学体系。当这类体系处于平衡态时, 则称此类平衡为当地平衡。质点在流动过程中不断改变其状态, 如果这种变化是一系列的平衡过程, 该质点每一瞬间皆处于平衡态, 称此为瞬时平衡。这样, 便可用具有时空分布的状态函数来描述流动系统。

## 二、反应度

化学反应计量方程的通式为



其中  $M_i$  表示单位摩尔的  $i$  组分,  $\nu_i'$  和  $\nu_i''$  分别为反应物和生成物的化学反应计量系数。该式说明消耗  $\nu_i' - \nu_i''$  摩尔的  $i$  组分可生成  $\nu_j'' - \nu_j'$  摩尔的  $j$  组分。因此

$$\frac{\Delta N_1}{a_1} = \frac{\Delta N_2}{a_2} = \dots = \frac{\Delta N_i}{a_i}$$

其中  $\Delta N_i$  为反应导致的组分  $i$  的摩尔数的变化,  $a_i = \nu_i'' - \nu_i'$  为计量系数,  $a_i < 0$  为反应物, 反之为产物。上式可写成

$$\frac{dn_i}{a_i} = de$$

其中  $n_i$  为组分  $i$  的摩尔浓度,  $\varepsilon$  称为基于摩尔的反应度。

若用  $i$  组分摩尔浓度的变化速率  $\dot{W} = \frac{dn_i}{dt}$  来表示化学反应速率, 有

$$\frac{\dot{W}_i}{a_i} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{W}$$

对于一个反应,  $\dot{W}_i$  的值通常是不同的, 与组分的选择有关, 但  $\dot{W}$  的值并不因此而变化, 故称为通用反应速率。

由于反应过程中质量守恒, 故

$$\sum_i \nu_i' W_i = \sum_i \nu_i'' W_i = W$$

其中  $W_i$  为  $i$  组分的分子量。于是

$$\sum_i \tilde{\nu}_i' \{M_i\} = \sum_i \tilde{\nu}_i'' \{M_i\}$$

其中  $\{M_i\}$  表示单位质量的  $i$  组分,  $\tilde{\nu}_i = \frac{\nu_i W_i}{W}$ , 进而有

$$\frac{dY_i}{b_i} = d\lambda$$

或

$$\frac{\dot{\psi}_i}{b_i} = \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\psi}$$

其中  $Y_i$  为  $i$  组分的质量分数,  $b_i = \tilde{\nu}_i'' - \tilde{\nu}_i'$ ,  $\lambda$  为基于质量反应度,

若令  $\lambda = \frac{Y_i - Y_{i,u}}{Y_{i,b} - Y_{i,u}}$ , 脚标  $u$  和  $b$  表示反应前和完全反应后, 则反应过程中  $\lambda$  从 0 变到 1。  $\dot{\psi}$  为基于质量的通用反应速率。

### 三、反应热

处于热力学平衡状态的体系称为简单热力学体系, 其状态可用两个选作独立变量的状态函数来确定, 其余的状态函数与独立变量之间满足一定的方程, 称为状态方程。例如选压力  $p$  和温度  $T$  为独立变量时, 比焓  $h$  应满足状态方程  $h = h(T, p)$ 。对于带化学反应的体系, 由于建立化学平衡所需时间较建立热动平衡长, 故可认为体系处于热力学的平衡态和化学反应的冻结态, 因此, 体系的状态还与各组分的浓度有关。但浓度的变化是由化学反应方程制约的, 从而可用反应度来替代, 于是  $h = h(p, T, \lambda)$ , 其中  $\lambda$  的分量  $\lambda_i$

表示第  $j$  个独立反应的反应度。微分该式

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, \lambda} dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, \lambda} dp + \left( \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)_{T, p} \cdot d\lambda$$

由于  $h = \sum Y_i h_i$ , 其中  $h_i = h_{0i} + \int_{T_0}^T c_{p,i} dT$ , 脚标“0”表示标准状态,  $h_{0i}$  为标准状态下  $i$  组分的生成焓,  $c_{p,i}$  为组分  $i$  的定压比热, 故

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \lambda_i} \right)_{T, p, \lambda_j (j \neq i)} = \sum b_i h_i = Q$$

其中  $Q$  为第  $j$  个反应的反应热,  $Q < 0$  为放热反应, 反之则为吸热反应。当  $c_p = \text{常数}$  时

$$Q = \sum b_i h_{0i} \quad (1-1)$$

显然,  $Q_i = \frac{Q}{b_i} = \frac{\sum h_{0i} b_i}{b_i}$ , 其中  $Q_i$  表示组分  $i$  的反应热。故

$$\sum \dot{\psi}_i h_{0i} = \dot{\psi} \sum b_i h_{0i} = \dot{\psi}_i Q_i = \dot{\psi} Q \quad (1-2)$$

对于完全气体,  $\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, \lambda} = 0$ , 故

$$dh = c_p dT + Q \cdot d\lambda \quad (1-3)$$

其中  $c_p = \sum Y_i c_{p,i}$ , 积分该式

$$h = h_{th} + h_{ch} \quad (1-4)$$

其中  $h_{th} = c_p T$  称为热焓,  $h_{ch} = Q \cdot \lambda$  称为化学焓。

#### 四、热性系数和热性

引进物理量  $\sigma$ , 其定义式为

$$\sigma = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)_{p, \lambda}$$

用来描述化学反应导致的流团体积的变化, 其中  $\rho$  为密度,  $v$  为比容。

考虑单反应情形, 对于状态方程  $v = v(\lambda, p, T(\lambda, p, h))$  有

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)_{p, h} = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p, \lambda} \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)_{p, p} + \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)_{p, T}$$

令  $\alpha_i = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p, \lambda}$  称为膨胀系数, 可以证明  $\alpha_i > 0$  [1]。

因为 
$$\left(\frac{\partial T}{\partial \lambda}\right)_{\lambda, p} = - \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right)_{T, p}}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{p, \lambda}} = - \frac{Q}{c_p}$$

故 
$$\sigma = \left(\frac{\partial \ln v}{\partial \lambda}\right)_{\lambda, T} - \frac{\alpha_f}{c_p} Q \quad (1-5)$$

显然,  $\sigma$  由两项组成, 第一项表示等温等压下反应导致的体积变化, 对于完全气体该项写成  $\left(\frac{\partial \ln n}{\partial \lambda}\right)_{\lambda, T}$ , 即摩尔数增加的反应该项为正, 反之为负。第二项表示反应热引起的体积变化, 放热反应  $Q < 0$ , 故  $-\frac{\alpha_f}{c_p} Q > 0$ , 反之该项为负。因此  $\sigma$  反映了体积膨胀导致的膨胀功。

定义  $\Sigma = \sigma \cdot \dot{v}$  称为热性, 该量表示反应体系以膨胀方式对外输出能量的速率。

## 1.1.2 基本方程

### 一、基本方程

多组分反应体系的守恒方程为<sup>[2,3]</sup>

质量守恒方程 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1-6)$$

组元守恒方程 
$$\rho \frac{DY_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho D_s \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - \dot{\omega}_s \quad (1-7)$$

动量守恒方程 
$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (1-8)$$

能量守恒方程 
$$\rho \frac{De}{Dt} = \pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (1-9)$$

其中 
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1-10)$$

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-11)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$e$  为比内能,  $u_i$  为质点速度在  $i$  方向的分量,  $D$  为扩散系数,  $\mu$  为粘性系数。  $\dot{\omega}_s = -\rho\dot{\psi}_s$  当  $s$  为反应物时  $\dot{\omega}_s > 0$ 。同一项中出现两次的脚标称为哑标, 它表示一种求和约定, 例如

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}$$

单独出现的脚标叫自由标, 不具有求和含义。  $q_j$  为热通量, 除热传导外还包括扩散携带的能量, 即

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum \rho_s h_s V_{sj} \quad (1-12)$$

其中  $k$  为热传导系数,  $V_{sj}$  为组分  $s$  在  $j$  方向的滑移速度, 根据 Fick 定律<sup>[4]</sup>

$$\rho_s V_{sj} = -D\rho \frac{\partial Y_s}{\partial x_j}$$

当  $c_m = \text{常数}$  时

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_s h_{0s} \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} + c_p \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

故(1-12)写成

$$q_j = -\frac{\mu}{Pr} \left( \frac{\partial h}{\partial x_j} + (Le - 1) \sum h_{0s} \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) \quad (1-13)$$

其中  $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$  为 Prandtl 数,  $Le = \frac{k}{\rho c_p D}$  为 Lewis 数。

将热力学关系式  $dh = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp$  代入(1-9)式

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (1-14)$$

其中  $\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  称为耗散函数。由(1-2)和(1-7)式

$$\sum h_{0s} \rho \frac{DY_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum h_{0s} \rho D \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} - \dot{\omega}_s Q_s$$

根据定义

$$h = GT + \sum h_{0s} Y_s$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_s h_{0s} \rho D \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - \dot{\omega}_s Q_s \quad (1-15)$$

由(1-14)式和(1-15)式

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \dot{\omega}_s Q_s \quad (1-16)$$

令  $H_a = h_a + \frac{u_a^2}{2}$  称为总焓, 由(1-8)和上式, 如果  $c_{ps} = c_p(T)$ , 则

$$\rho \frac{DH_a}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho T D \sum c_{ps} \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} + \dot{\omega}_s Q_s \quad (1-17)$$

## 二、方程的简化

方程组中(1-6)和(1-8)式为流动方程(或称为 Navier—Stokes 方程), 它不显含化学反应项, 方程的形式与流场中是否有化学反应无关。(1-7)式和(1-9)式(或(1-14)式、(1-15)式、(1-16)式、(1-17)式)为传递方程, 它反映了化学反应和输运效应对流场的影响。这两类方程的耦合组成了非常复杂的非线性方程组, 它不但包含流体力学守恒方程所具有的线性而且包含化学反应所具有的指数非线性, 因此仅能数值求解。为了分析燃烧的基本特征, 可对方程进行一些简化。例如当  $\rho = \text{常数}$  时, 即忽略化学反应导致的体积膨胀时, 两类方程可被解耦, 从流动方程中便可解出  $u_i$  和  $p$ 。这种只考虑流动对燃烧的影响不考虑燃烧对流场影响的模型称为扩散热模型<sup>[5]</sup>。

为进一步讨论方程的特性, 引入无量纲量

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}, t^* = \frac{tL}{u^0}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho^0}, u_i^* = \frac{u_i}{u^0}, p^* = \frac{p}{p^0},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu^0}, T^* = \frac{T}{T^0}, c_s^* = \frac{c_s}{c_s^0}, k^* = \frac{k}{k^0}, D^* = \frac{D}{D^0}$$

其中上标 0 表示特征参照量, 于是

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1-18)$$



$$\rho^* \frac{DY_s}{Dt^*} = \frac{\varepsilon}{Le} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left( \rho^* D^* \frac{\partial Y_s}{\partial x_j^*} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \rho^* \dot{\psi}_s^* \quad (1-19)$$

$$\gamma M^2 \rho^* \frac{Du_i^*}{Dt^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \gamma M^2 \varepsilon Pr \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} = & \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Dp^*}{Dt^*} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \frac{\varepsilon}{Le} \left( \rho^* T^* D^* \Sigma c_p^* \frac{\partial Y_s}{\partial x_j^*} \right) \\ & + \varepsilon (\gamma-1) M^2 Pr \phi^* - \frac{1}{\varepsilon} \rho^* Q_s^* \dot{\psi}_s^* \end{aligned} \quad (1-21)$$

其中  $M = \frac{u^0}{a^0} = \frac{u^0}{\sqrt{\gamma p^0 / \rho^0}}$  为特征马赫数,  $\gamma$  为绝热指数,  $a$  为声速。

$Re = \frac{u^0 L \rho^0}{\mu^0}$  为特征雷诺数。

$\varepsilon = \frac{1}{Re Pr} = \frac{\alpha^0}{u^0 L}$  为反应区特征宽度,  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  称为热扩散系数。

$$Q_s^* = \frac{Q_s}{c_p^0 T^0}$$

$$\dot{\psi}_s^* = \frac{\alpha}{u_{\infty}^0} \dot{\psi}_s$$

当  $M^2 \ll 1$  时, (1-20) 式可写成

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = 0$$

这说明压力在空间没有分布, 即流场中压力均匀。同时 (1-21) 式中  $\phi^*$  项也可忽略, 当  $c_{ps}$  = 常数时

$$\rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \rho^* Q_s^* \dot{\psi}_s^* \quad (1-22)$$

当  $\varepsilon$  很小时, 可以忽略方程中的输运项。

### 1.1.3 火焰

#### 一、点火面模型

燃烧有两种: 一种是燃料和氧化剂由分开状态通过扩散进入

反应区,当混合速率小于反应速率时,反应在很窄的区域内进行,这类燃烧叫扩散燃烧;另一种是燃料和氧化剂进入反应区前已经均匀混合,称为预混燃烧。

预混燃烧的燃料和氧化剂始终处于混合状态,与燃烧产物相比,这是一种亚稳状态,任何温度下,皆以一定的速度进行反应。这使得反应物的边界不具有确定值,从而给求解带来困难,称为冷边界困难<sup>[6]</sup>。

反映化学反应速率的 Arrhenius 公式中,反应速率常数  $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$ , 其中  $A$  为频率因子,  $E_a$  为活化能,  $R$  为普适气体常数。 $\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$  随温度  $T$  的变化曲线如图 1-1 所示。图中可以看出,在某温度范围内,反应速率发生急剧变化。

点火面模型将反应速率突跃区域视作一个间断面,称为点火面或火焰阵面,对应的温度  $T_i$  称为点火温度。当  $T < T_i$  时,不发生化学反应,仅当  $T \geq T_i$  时才开始点火燃烧。火焰阵面的传播速度称为火焰速度,记作  $s_f$ 。若阵面前质点的法向速度为  $u_n$ , 记  $s_n = s_f - u_n$  称为燃烧速度。

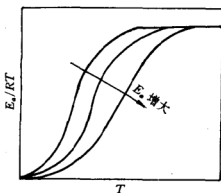


图 1-1 反应速率随温度变化曲线

点火是从非反应状态到反应状态的过渡过程,该过程非常复杂,包含了许多物理和化学过程的相互作用。确定点火参数(如点火温度),无论是实验还是理论都是比较困难的。有一些近似方法,这将在以后有关章节中给予介绍。

## 二、间断面模型<sup>[7]</sup>

某些条件下,如  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,可将火焰视作一种间断,它将未反应和已反应的区域截然分开。此时,火焰可用某种曲面方程来描述,即

$$F(x, t) = 0$$

或 
$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \nabla F \cdot dx = 0, \text{ 令 } V = \frac{dx}{dt}, \text{ 则}$$

$$s_F = V \cdot n = - \frac{\partial F}{\partial t} / |\nabla F| \quad (1-23)$$

其中  $n$  为火焰阵面的单位法矢量。火焰阵面上, 即  $F(x, t) = 0$  处, 应满足方程

$$[\rho(u - s_F)] = 0 \quad (1-24)$$

$$[p + \rho(u - s_F)u] = 0 \quad (1-25)$$

$$\left[ h + \frac{(u - s_F)^2}{2} \right] = 0 \quad (1-26)$$

其中符号  $[\ ]$  表示间断两侧值的差。

## 1.2 定常燃烧

为讨论化学反应与流动的相互作用, 这里采用最简单的反应模型



这是一个单组元反应系统, 反应物  $s$  和产物  $p$  分别视为两种组分, 于是反应物的质量分数  $Y_s$  可以决定系统的化学组成。由 (1-1) 式

$$Q = h_{0p} - h_{0s}$$

脚标  $s$  和  $p$  分别表示反应物和产物, 与  $h_{0s}$  相比可以忽略  $h_{0p}$ , 故

$$Q = -h_{0s}$$

或 
$$Q_s = h_{0s} \quad (1-27)$$

### 1.2.1 慢燃<sup>[8]</sup>

所谓慢燃指全流场皆满足  $M = \frac{u}{a} \ll 1$ 。根据前节讨论, 此时

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \phi = 0$ , 故一维问题有

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + (Le - 1) Q_s \frac{\partial Y_s}{\partial x} \right)$$

若进一步假设  $Le=1$ ,  $\frac{\partial p}{\partial t}=0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\alpha\frac{\partial h}{\partial x}\right)=0$ , 则有

$$c_p T + Q_s Y_s = c_p T_b = \text{常数} \quad (1-28)$$

考虑反应仅出现在  $x>0$  的半无限空间,  $x=0$  时  $T=T_b$ ,  $Y_s=1$ , 于是

$$\theta + Y_s = 1 \quad (1-29)$$

其中  $\theta = \frac{T-T_b}{T_s-T_b}$ 。反应物的守恒方程为

$$\rho \frac{DY_s}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D \frac{\partial Y_s}{\partial x} \right) + \dot{\omega}_s = 0$$

如果  $\dot{\omega}_s = A \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right) \rho Y_s$ , 对于定常问题

$$\rho u \frac{\partial Y_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D \frac{\partial Y_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{t_{cs}} \rho Y_s = 0$$

其中  $t_{cs} = \frac{1}{A \exp(-E_s/RT)}$ , 称为反应特征时间。根据碰撞理论<sup>[9]</sup>,

$A = a_f^2/\nu$ , 其中  $a_f^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s, \lambda}$  为冻结声速,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  为动力粘性。

引入无量纲量  $\xi = \int_0^x \frac{dx}{l_r}$ , 其中  $l_r = \frac{\alpha}{u}$  为特征长度, 上式写成

$$\frac{\partial Y_s}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 Y_s}{\partial \xi^2} + \Omega Y_s = 0 \quad (1-30)$$

其中  $\Omega = t_{diff}/t_{cs}$  称为 Damköhler 数,  $t_{diff} = \frac{\alpha}{u^2}$  为特征扩散时间。将 (1-29) 式代入 (1-30) 式

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \Omega_{(s)} (1 - \theta) = 0 \quad (1-31)$$

C                  D                  R

式中左端各项分别标以 C、D、R 表示对流项、扩散项和反应项。令

$V = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ , 有

$$V \frac{dV}{d\theta} = V - V_s(\theta) \quad (1-32)$$

该方程为慢燃火焰结构方程, 其中  $V_s(\theta) = \Omega_{(s)} (1 - \theta)$ ,  $\theta=1$  时  $V_s(1)=0$ ;  $\theta=0$  时  $V_s(0) \neq 0$  (因为  $\Omega_{(s)} \neq 0$ )。由于  $\Omega_{(s)}$  是单调上升的, 故  $V_s$  在  $\theta_s$  点取极大值, 如图 1-2 所示。

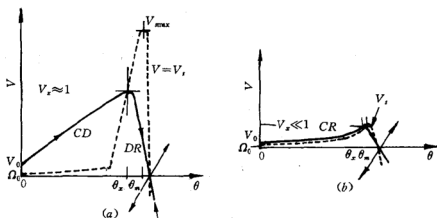


图 1-2 慢燃火焰结构

(a) 输运燃烧; (b) 对流燃烧。

方程(1-32)的积分曲线与  $V_s$  曲线的交点记作  $V_s$ , 它是方程(1-32)的极值点,  $\frac{dV}{d\theta} > 0$  时,  $V > V_s$ , 反之  $V < V_s$ 。  $(0, 1)$  点是方程的奇点, 该点附近  $\frac{dV}{d\theta} = -c_1$ ,  $c_1$  为某常数。

### 一、输运燃烧

流场的  $\Omega$  (Damköhler 数) 与  $x=0$  处的  $T_0$  和  $M_0$  有关。计算表明,  $M_0 < 10^{-3}$  时,  $\Omega_0 \ll 1 \ll \Omega_b$ , 脚标 0 和 b 分别表示  $x=0$  和  $x=+\infty$ , 即反应结束处。此时方程(1-32)的积分曲线如图 1-2(a)所示。

$\theta$  接近于 1 时,  $\frac{dV}{d\theta} \gg V$ , 即  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \gg \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ , 故忽略  $C$  项

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \Omega_{(0)}(1 - \theta) = 0 \quad (1-33)$$

相应的区域叫 DR 区域。

$\theta$  接近于 0 时,  $V_0 \gg \Omega_0$ , 忽略  $R$  项

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad (1-34)$$

相应的区域叫 CD 区域。 $\theta = \theta_s$  附近是 CD 区域与 DR 区域的转换区域。具有上述结构的燃烧称为输运燃烧。如果忽略转换区域, 火焰

由  $CD$  和  $DR$  两个区域构成, 将坐标建立在区域交界处, 于是

$$CD \text{ 区域} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho u c_p}{k} \frac{dT}{dx} = 0$$

$$\text{边界条件为} \quad x = -\infty, T = T_0 \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$x = 0_-, T = T_{ig}$$

积分该式, 设  $T_{ig} \simeq T_b$

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0_-} = \frac{\rho u c_p (T_b - T_0)}{k} \quad (1-35)$$

$$DR \text{ 区域} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{\omega}_s Q_s}{k} = 0$$

$$\text{或写成} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 = -2 \left( \frac{dT}{dx} \right) \frac{Q_s \dot{\omega}_s}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{边界条件为} \quad x = 0_+, T &= T_{ig} \\ x = \infty, T &= T_b \quad \frac{dT}{dx} = 0 \end{aligned}$$

积分上式

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0_+} = \int_{T_{ig}}^{T_b} \frac{2 Q_s \dot{\omega}_s}{k} dT$$

$$\text{两区交界处} \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0_+} = \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0_-}, \text{故}$$

$$(\rho u)^2 = \frac{2k\theta_s}{c_p^2 (T_b - T_0)} \int_{T_{ig}}^{T_b} \dot{\omega}_s dT$$

由于  $T_0$  和  $T_{ig}$  之间几乎未发生反应, 故

$$\int_{T_{ig}}^{T_b} \dot{\omega}_s dT \simeq \int_{T_0}^{T_b} \dot{\omega}_s dT$$

$$\text{于是} \quad s_* = \sqrt{\frac{k}{c_p} \frac{2}{T_b - T_0}} I \quad (1-36)$$

$$\text{其中} \quad I = \frac{1}{Y_{s0}} \int_{T_0}^{T_b} \dot{\omega}_s dT$$

对于方程(1-32),  $V_{(0)} \neq 0$ , 这说明  $x=0$  处存在能量传递, 该处可视作火焰的助稳器。如果火焰在无限空间传播,  $x=-\infty$  处  $T=T_0(t)$ , 此时  $T_0$  不再是定值。当  $M \ll 1$  时, (1-16) 式可写成

$$-\rho \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{Q_s}{c_p} \rho \dot{\psi} = 0 \quad (1-37)$$

引进无量纲量  $\theta = \frac{T - T_0(t)}{T_b - T_0(t)}$

$$-\rho \frac{D\theta}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\rho}{Y_{s0}(t)} \{ \dot{\psi} - (1 - \theta) \dot{\psi}_0 \} = 0 \quad (1-38)$$

假设  $x = -\infty$  处,  $u = 0$ ,  $\frac{dT}{dx} = 0$ , 则

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{Q_s}{c_p} \dot{\psi}_0$$

由(1-28) 
$$Y_{s0}(t) = \frac{c_p(T_b - T_0(t))}{Q_s}$$

故 
$$Y_s = Y_{s0}(t)(1 - \theta) \quad (1-39)$$

若将坐标建立在火焰阵面上, 有

$$x = X + \int_0^x S_F(t) dt$$

$$U = u - S_F$$

方程(1-38)写成

$$-\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \rho \alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\rho}{Y_{s0}(t)} \{ \dot{\psi} - (1 - \theta) \dot{\psi}_0 \} = 0$$

引进坐标  $\xi = \int_0^x \frac{U}{\alpha} dx$ , 于是

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \Omega_s (1 - \theta) = 0 \quad (1-40)$$

其中  $\Omega_s = \Omega - \Omega_0$ ,  $\Omega = \frac{\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)}{Pr M^2}$ ,  $\Omega_0 = \frac{a_{f0}^2 v \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right)}{a_f^2 v Pr M^2}$ ,  $M = \frac{U}{a_f}$ 。方程(1-40)与(1-31)的形式基本一致, 差异仅在  $\Omega_s$  与  $\Omega$  的表达形式不同。

上述讨论似乎解决了冷边界困难, 实际上  $u=0$  的假设并不合理, 故结果具有相当误差。

## 二、对流燃烧

仍讨论  $x > 0$  半无限平面的燃烧问题, 根据(1-32)式, 随  $M_0$  增大,  $V_0$  和  $\Omega_0$  皆下降, 以致  $\Omega_0 \ll \Omega_s \ll 1$ , 积分曲线  $V$  也趋于  $V_s$  曲线,

如图 1-2(b)。当  $M_0 > 10^{-2}$ ,  $V$  与  $V_s$  之差仅为一小量, 即  $V = V_s + \bar{v}$ ,  $\bar{v}$  代表小量, 代入 (1-32) 式

$$(V_s + \bar{v}) \left( \frac{dV_s}{d\theta} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) = \bar{v}$$

当  $\frac{d\bar{v}}{d\theta} = 0$  时,  $\bar{v}$  取最大值

$$\bar{v}_{\max} = \frac{V_s \frac{dV_s}{d\theta}}{1 - \frac{dV_s}{d\theta}} \simeq V_s \frac{dV_s}{d\theta}$$

故 (1-31) 式写成

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \Omega_{(\theta)} (1 - \theta) \quad (1-41)$$

由于方程忽略了扩散项, 各质点均视作隔离物系, (1-41) 式与第六章热爆炸方程 (6-5) 形式一致, 故质点在流动过程中经历了自点火的热爆炸过程, 如图 1-3 所示。具有这种结构的燃烧称为对流燃烧或爆炸燃烧。

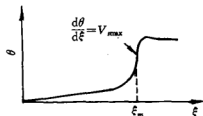


图 1-3 对流燃烧的温度剖面

根据点火面模型, 无论是输运燃烧还是对流燃烧, 点火面将

反应区分为两部分: 诱导区和燃烧区。诱导区的反应速率很小, 反应热主要在燃烧区释放。对于输运燃烧, 燃烧区 (即  $DR$  区域) 释放的热通过热传导使上游诱导区 (即  $CD$  区域) 预热导致点火。对于对流燃烧, 反应流团以绝热方式向下游运动, 因化学反应而自加热, 达到点火温度后急剧反应。诱导区的宽度与初始条件的设置有关。

### 1.2.2 快燃<sup>[1,8]</sup>

所谓快燃指流场中  $M$  足够大, 此时压力在空间不再均匀, 忽略扩散项, 有方程



$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-42)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1-43)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (1-44)$$

$$\frac{DY_s}{Dt} + \dot{\psi} = 0 \quad (1-45)$$

由状态方程  $h=h(p, \rho, Y_s)$

$$\frac{Dh}{Dt} = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{\rho, Y_s} \frac{Dp}{Dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_{p, Y_s} \frac{D\rho}{Dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial Y_s} \right)_{p, \rho} \frac{DY_s}{Dt}$$

由  $h=e+pv$ , (1-42)式和(1-44)式

$$\frac{Dp}{Dt} - \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_{p, Y_s}}{\left( \frac{\partial e}{\partial p} \right)_{\rho, Y_s}} \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial Y_s} \right)_{p, \rho}}{\left( \frac{\partial e}{\partial p} \right)_{\rho, Y_s}} \dot{\psi} \quad (1-46)$$

由状态方程  $p=p(s, \rho, Y_s)$

$$\alpha_f^2 = - \left( \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_{p, Y_s} / \left( \frac{\partial e}{\partial p} \right)_{\rho, Y_s} \quad (1-47)$$

由于  $\left( \frac{\partial h}{\partial Y_s} \right)_{p, \rho} = - \left( \frac{\partial v}{\partial Y_s} \right)_{p, h} \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)_{p, Y_s} = -\rho\sigma$ , 故

$$\rho \alpha_f^2 \sigma = \left( \frac{\partial h}{\partial Y_s} \right)_{p, \rho} / \left( \frac{\partial e}{\partial p} \right)_{\rho, Y_s} \quad (1-48)$$

将(1-47)式、(1-48)式代入(1-46)式得

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho \alpha_f^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \alpha_f^2 \Sigma \quad (1-49)$$

流场定常时, (1-42)式和(1-43)式写成

$$\rho u = m = \text{常数} \quad (1-50)$$

$$p + m^2 v = \text{常数} \quad (1-51)$$

或

$$p + mu = mu_f = \text{常数} \quad (1-52)$$

在  $p-v$  平面, (1-51)式表示一条斜率为负的直线, 叫 Rayleigh 线。化学反应是沿着该线进行的, 故又称为 Rayleigh 过程。将(1-52)式代入(1-49)式得

$$\dot{p} = - \frac{M^2}{1 - M^2} \rho a_f^2 \Sigma \quad (1-53)$$

$$\text{进而有} \quad \dot{u} = - \dot{p}/m \quad (1-54)$$

$$\dot{v} = - \dot{p}/m^2 \quad (1-55)$$

其中,  $\cdot$  表示  $u \frac{\partial}{\partial x}$ 。对于亚声速燃烧,  $M < 1, \Sigma > 0$ , 故  $\dot{p} < 0, \dot{u} > 0, \dot{v} > 0$  或  $\dot{\rho} < 0$ , 即 Rayleigh 过程中压力和密度减小, 速度和比容增加; 反之, 对于超声速燃烧, 变化趋势相反。由 (1-53) 式和 (1-54) 式

$$\left( \frac{\partial e}{\partial p} \right)_{Y_s, \rho} m \dot{u} = \frac{u^2}{a_f^2 - u^2} \frac{c_p}{\alpha_f} \sigma \dot{Y}_s \quad (1-56)$$

对于完全气体

$$\frac{\dot{u}}{\gamma - 1} = \frac{c_p T \sigma \dot{Y}_s}{\gamma u_f - (\gamma + 1) u}$$

该方程描述了 Rayleigh 过程的  $u-Y_s$  关系, 其曲线如图 1-4 所示。

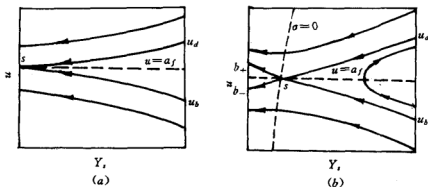


图 1-4 快燃  $u-Y_s$  曲线

(a) 燃烧后摩尔数增多; (b) 燃烧后摩尔数减少。

显然,  $u = a_f$  是方程的奇点。对于摩尔数增多的放热反应, 总有  $\sigma > 0$ , 故仅当  $\dot{Y}_s = 0$  时方程 (1-56) 在该点才有解 (见图 1-4(a))。积分曲线不能跨越声迹线, 即流场不能出现超声速和亚声速的互变。以本征速度  $u_b$  (或  $u_d$ ) 传播的火焰, 燃烧在声速面上结束, 称为 C—J 火焰。对于摩尔数减少的放热反应,  $\sigma$  可能变号, 即  $\sigma \dot{Y}_s = 0$  时  $\dot{Y}_s$  可以不为零 (见图 1-4(b))。在适当的条件下, 流场可以跨越声速。

根据状态方程  $T=T(p, v, Y_s)$

$$\dot{T} = \frac{\beta_f}{\alpha_f} \dot{p} + \frac{\rho}{\alpha_f} \dot{v} + \left( \frac{\partial T}{\partial Y_s} \right)_{p,v} \dot{Y}_s$$

其中  $\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, Y_s}$  为等温压缩系数。由(1-55)式写成

$$\dot{T} = \frac{1}{\alpha_f} \left[ \beta_f - \frac{1}{\rho u^2} \right] \dot{p} + \left( \frac{\partial T}{\partial Y_s} \right)_{p,v} \dot{Y}_s$$

对于完全气体,反应前后摩尔数不变时

$$c_s \dot{T} = \left\{ \frac{1 - \gamma M^2 \bar{Q}}{1 - M^2} \right\} \dot{p} \quad (1-57)$$

其中  $\bar{Q} = -Q$ , 放热反应  $\bar{Q} > 0$ 。显然, 当  $0 < M < \frac{1}{\gamma}$  或  $M > 1$  时,  $\dot{T} >$

0, 温度升高, 当  $\frac{1}{\gamma} < M < 1$  时,  $\dot{T} < 0$ , 温度下降。

### 1.2.3 爆轰波<sup>[1,9]</sup>

流场马赫数较大时(对流慢燃或快燃), 如果忽略输运效应, 每个质点则成了绝热体系各自经历自加热过程。该过程与初始条件的设置有关。仍讨论  $x > 0$  的稳定燃烧, 设  $x=0$  处有一驻定激波, 或视作坐标原点被建在激波上, 流场初值是由激波设置的, 根据(1-42)式至(1-44)式, 其守恒方程为

$$[\rho u] = 0 \quad (1-58)$$

$$[p + \rho u^2] = 0 \quad (1-59)$$

$$\left[ h + \frac{u^2}{2} \right] = 0 \quad (1-60)$$

其中  $[\ ]$  表示任意两截面的差值, 通常有  $[\ ] = A - A_0$ , 脚标 0 表示  $x = 0_-$ , 即激波阵面前的值, 无脚标表示反应区内任一截面的值。由(1-58)式和(1-59)式得

$$\begin{aligned} [u] - m[v] &= 0 \\ [p] + m[u] &= 0 \end{aligned} \quad (1-61)$$

故

$$[p] = -m^2[v]$$

$$\text{或写成} \quad p - p_0 + m^2(v - v_0) = 0 \quad (1-62)$$

此式称为 Rayleigh 方程, 在  $p$ - $v$  平面是一根过  $(p_0, v_0)$  斜率为负的直线。由 (1-60) 式可得

$$[h] + \bar{u}[u] = 0$$

其中  $\bar{u} = \frac{u_0 + u}{2}$ 。将 (1-61) 式代入上式

$$[h] - \bar{v}[p] = 0 \quad (1-63)$$

$$\text{或} \quad [e] + \bar{p}[v] = 0$$

此式称为 Hugoniot 方程。由于  $e = e_n + \bar{Q}Y_s$ , 故

$$\mathcal{H} = [e_n] + \bar{p}[v] = (1 - Y_s)\bar{Q} = \lambda\bar{Q} \quad (1-64)$$

在  $p$ - $v$  平面这是一族与  $\lambda$  值有关的曲线, 称为冻结 Hugoniot 曲线。

### 一、 $p$ - $v$ 平面

Rayleigh 线上  $p = p(v)$ , 故

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)_R = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_r - \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_r m^2$$

脚标  $R$  表示沿 Rayleigh 线微分。当  $\left(\frac{ds}{dv}\right)_R = 0$  时

$$m^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_r^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_r = - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s$$

这说明等熵线与 Rayleigh 线相切, 熵在切点上取极值。由于  $m^2 = (\rho u)^2$ ,  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -(\rho a_f)^2$ , 故切点处  $M_f = 1$ 。Rayleigh 线被切点分为两部分, 根据 Bethe—Weyl 条件<sup>[9]</sup>等熵线是上凹的, 故右侧  $-\text{Slop}R < -\text{Slop}S$ , 即  $M_f > 1$ , 其中  $\text{Slop}R$  和  $\text{Slop}S$  分别表示 Rayleigh 线和等熵线斜率。同理, 左侧  $M_f < 1$ 。Rayleigh 线与等熵线的切点轨迹方程为

$$\frac{p - p_0}{v - v_0} = - \frac{a_f^2}{v^2}$$

对于完全气体,  $a_f^2 = \gamma p v$ , 故

$$\left(p - \frac{p_0}{\gamma + 1}\right) \left(v - \frac{\gamma v_0}{\gamma + 1}\right) = \frac{\gamma p_0 v_0}{(\gamma + 1)^2}$$

这是一条过  $(p_0, v_0)$  点的双曲线, 称为声迹线, 其右侧为超声速区

域,  $M_f > 1$ 。左侧为亚声速区域,  $M_f < 1$ 。由(1-64)式可得

$$d\mathcal{H} = de_n + \frac{1}{2}(v - v_0)dp + \frac{p + p_0}{2}dv$$

根据热力学关系式  $de_n = Tds - pdr$ , 有

$$d\mathcal{H} = Tds + \frac{1}{2}(v - v_0)dp - \frac{1}{2}(p - p_0)dr$$

由于 Rayleigh 线上  $\frac{1}{2}(v - v_0)dp - \frac{1}{2}(p - p_0)dr = 0$ ,  $\mathcal{H}$  函数与熵在其上的变化规律一致, Hugoniot 曲线、等熵线和 Rayleigh 线在  $M_f = 1$  点同时相切。

## 二、激波强度方程

当  $\lambda = 0$  时, 方程(1-64)写成

$$[e_n] + \bar{p}[r] = 0 \quad (1-65)$$

此为激波 Hugoniot 方程。方程(1-58)、(1-59)和(1-65)构成了绝热激波的基本方程。

设激波传播速度为  $D$ ,  $\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t} + D \frac{\partial}{\partial x}$  表示沿激波轨迹求导, 于是(1-43)和(1-49)可分别写成

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt}\right)_s + (u - D) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{dp}{dt}\right)_s + (u - D) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_f^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \rho a_f^2 \Sigma \end{aligned}$$

运动激波波前质点静止时, (1-58)式写成

$$\rho(D - u) = \rho_0 D$$

其中脚标 0 表示波前值, 无脚标为波后值。由上述三式加得

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_s = \frac{\rho a_f^0 \left( \Sigma - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{1 + \rho_0 D \left( \frac{du}{dp} \right)_s} \quad (1-66)$$

称此方程为激波强度方程, 其中  $\eta = 1 - M_s^2$ ,  $M_s = \frac{D}{a_f}$ 。由于绝热激波

$\left(\frac{du}{dp}\right)_s > 0^{[1]}$ , 故  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_s$  的符号决定于  $\Sigma - \eta \frac{\partial u}{\partial x}$ 。对于惰性介质中的绝热激波,  $\Sigma = 0$ , 于是

$$\text{Sgn}\left(\frac{dp}{dt}\right)_s = \text{Sgn}\left(-\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

由于  $\eta > 0$ , 故  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$  时, 即波后流体膨胀时, 激波强度将下降, 激波能量向波后传递。如果波后流场由于活塞推动保持  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , 激波可稳定传播。 $\Sigma$  与化学反应有关, 对于摩尔数增多的放热反应,  $\Sigma > 0$ , 这使激波增强, 即化学反应热部分用来支持激波的传播。

### 三、Jouguet 规则

当  $\lambda = 1$  时, 方程(1-64)写成

$$[e_u] + \bar{p}[v] = \bar{Q} \quad (1-67)$$

它对应于反应结束端面, 该 Hugoniot 曲线记作  $\mathcal{H}_0(1)$ , 位于  $(p_0, v_0)$  点上方, 如图 1-5 所示。

该曲线可以分为五个区域, 如图 1-5(a) 所示。因为  $\text{Slop} R < 0$ ,

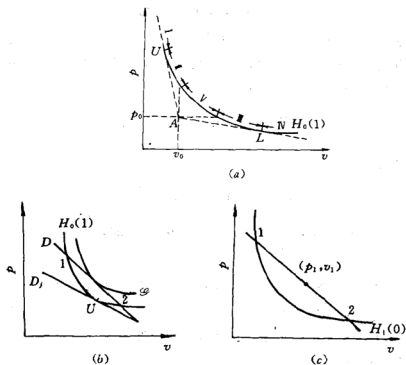


图 1-5 Jouguet 规则

故图中(V)区没有物理意义。设  $\text{Slop} R = -(\rho_0 D_j)^2$  时, Rayleigh 线与  $\mathcal{H}_0(1)$  切于  $U$  点, 该点  $M=1$ 。当  $D > D_j$  时, 如图 1-5(b) 所示, Rayleigh 线与  $\mathcal{H}_0(1)$  交于 1, 2 两点, 有

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)_{r,1} > 0, \left(\frac{ds}{dv}\right)_{r,2} < 0$$

因为  $\left(\frac{ds}{dv}\right)_r = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p - (\rho_0 u_0)^2 \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v$ , 故

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)_r = \rho^2 a^2 (1 - M^2) \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v$$

根据 Bethe—Weyl 条件,  $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v > 0$ , 故

$$\text{Sgn}(1 - M^2) = \text{Sgn}\left(\frac{ds}{dv}\right)_r$$

即 1 点  $M < 1$  为亚声速流, 2 点  $M > 1$  为超声速流, 进而有 (I) 区为亚声速区, 对应于强爆轰波, (II) 区为超声速区, 对应于弱爆轰波。 $U$  点称为  $C$ - $J$  爆轰点, 对应于  $C$ - $J$  爆轰。

若将方程 (1-67) 中  $p_0, v_0$  视作变量,  $p, v$  视作参量, 有 Hugoniot 曲线如图 1-5(c) 所示。过  $(p, v)$  点的 Rayleigh 线与 Hugoniot 曲线交于 1, 2 两点, 有

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)_{r,1} > 0, \left(\frac{ds}{dv}\right)_{r,2} < 0$$

同样可得

$$\text{Sgn}(1 - M_0^2) = \text{Sgn}\left(\frac{ds}{dv}\right)_r$$

对于爆轰波  $v_0 > v$ , 即对应于 2 点, 故  $M_0 > 1$ , 即爆轰波波前为超声速流动。

(III)、(IV) 区为爆燃分支, 同样可以证得其波前为亚声速流。(III) 区对应于弱爆燃波, 波后为亚声速, (IV) 区对应于强爆燃波, 波后为超声速。切点  $L$  称为  $C$ - $J$  爆燃点, 对应于  $C$ - $J$  爆燃。上述规律称为 Jouguet 规则。

#### 四、ZND(Zeldovich—VonNeumann—Döring)模型

方程 (1-64) 表示  $p$ - $v$  平面的一族 Hugoniot 曲线 (或称等  $\mathcal{H}$

线),如图 1-6 所示。其中  $\mathcal{H}_0(0)$  表示激波绝热线,  $\mathcal{H}_0(\lambda)$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) 表示冻结 Hugoniot 曲线。与  $D_1$  对应的 Rayleigh 线与  $\mathcal{H}_0(0)$  交于  $N$  点(称为 VonNeumann 尖点)、与  $\mathcal{H}_0(1)$  相切于  $C$  点。它表示质点经激波压缩后由初始状态  $(p_0, v_0)$  突跃到  $(p_N, v_N)$  状态,然后沿

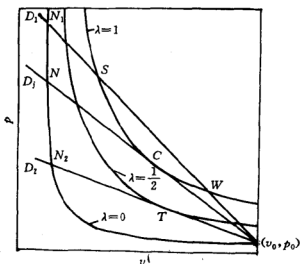


图 1-6 爆轰波的  $p-v$  平面

Rayleigh 线趋于  $C$  点,此时  $M=1, \dot{\psi}=0$  故  $\eta=0, \Sigma=0$ 。根据(1-66)式  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_s=0$ , 故爆轰波稳定传播。称  $M=1$  时  $\dot{\psi}=0$  为  $C-J$  条件,相应的爆轰波为  $C-J$  爆轰波,  $D_1$  为  $C-J$  爆速。当  $D > D_1$  时,质点从  $(p_0, v_0)$  状态突跃至  $(p_{N_1}, v_{N_1})$  状态,再沿 Rayleigh 线趋于  $S$  点,该点  $\dot{\psi}=0, M < 1$  故  $\eta > 0, \Sigma=0$ 。根据(1-66)式,除非波后有活塞支持使  $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ , 否则该波不能稳定传播。 $S$  点的反应已经结束,故对应于  $W$  点的弱爆轰波是没有物理意义的。 $D < D_1$  的情形将于 1.3 节中讨论。

对于完全气体,  $e = \frac{pv}{\gamma-1} + (1-\lambda)\bar{Q}$ , 设  $\gamma = \text{常数}$ , 有

$$\rho_0 u_0 = \rho u \quad (1-68)$$

$$p_0 + \rho_0 u_0^2 = p + \rho u^2 \quad (1-69)$$



$$\frac{p_0 v_0}{\gamma - 1} + p_0 v_0 + \frac{u_0^2}{2} + \lambda \bar{Q} = \frac{p v}{\gamma - 1} + p v + \frac{u^2}{2} \quad (1-70)$$

其 Hugoniot 方程为

$$\left( \frac{p}{p_0} + \mu^2 \right) \left( \frac{v}{v_0} - \mu^2 \right) = 1 + \mu^4 + 2\mu^2 \frac{\lambda \bar{Q}}{p_0 v_0} \quad (1-71)$$

其中  $\mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ , 该方程表示一组以  $\lambda$  为参数的双曲线簇。由守恒方程组(1-68)~(1-70)可解得

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0} &= \frac{1}{(\gamma + 1) M_0^2} (\gamma M_0^2 + 1 - \sqrt{(M_0^2 - 1)^2 - 2(\gamma^2 - 1) M_0^2 \lambda q}) \\ &= v(\lambda) \end{aligned} \quad (1-72)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 + 2\mu^2 \gamma q - \mu^2 \frac{v}{v_0}}{\frac{v}{v_0} - \mu^2} = p(\lambda) \quad (1-73)$$

其中  $M_0 = \frac{u_0}{a_0}$ ,  $q = \frac{\bar{Q}}{a_0^2}$ , 同样可求得  $u = u(\lambda)$  等。如果已知  $\psi(\lambda)$  的函数形式, 通过  $\frac{d\lambda}{dt} = \psi(\lambda)$  和上述诸式便可求得爆轰波的结构。这种一维结构模型称为 ZND 模型。

CJ 点上,  $\lambda = 1$  且  $(M_0 - M_0^{-1})^2 = 2(\gamma^2 - 1)q$ , 故

$$\frac{v_j}{v_0} = \frac{\gamma + \zeta_j}{\gamma + 1} \quad (1-74)$$

$$\frac{p_j}{\rho_0 D_j^2} = \frac{\gamma + \zeta_j}{\gamma(\gamma + 1)} \quad (1-75)$$

$$\frac{u_j - D_j}{D_j} = \frac{1 - \zeta_j}{\gamma + 1} \quad (1-76)$$

脚标  $j$  表示 C-J 值,  $\zeta = \frac{1}{M_0^2}$ 。如果忽略  $\zeta_j$ , 有

$$D_j = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)Q} \quad (1-77)$$

$$\frac{v_j}{v_0} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \quad (1-78)$$

$$\frac{p_j}{\rho_0 D_j^2} = \frac{1}{\gamma + 1} \quad (1-79)$$

$$\frac{u_j - D_j}{D_j} = \frac{1}{\gamma + 1} \quad (1-80)$$

### 1.3 非定常燃烧

#### 1.3.1 弱激波诱导的非定常燃烧<sup>[8]</sup>

爆轰波由两部分组成:引导激波和反应区。引导激波的强度与 Rayleigh 线斜率有关,该线与  $\mathcal{H}_o(0)$  的交点  $S$  为激波波后状态。严格地讲,反应区的初始状态应为  $S$  而不是  $O$ ,故对应的 Hugoniot 方程写成  $\mathcal{H}_s(\lambda)$ ,脚标表示反应的初始状态。人们不禁要问  $\mathcal{H}_o(1)$  与  $\mathcal{H}_s(1)$  重合吗?因为前节关于爆轰波的讨论是基于  $\mathcal{H}_o(1)$  曲线的。

设有 Rayleigh 线  $OM$ ,对应于  $D \geq D_j$ ,如图 1-7,它与  $\mathcal{H}_o(0)$  的交点为  $M$ ,与  $\mathcal{H}_s(1)$  的交点为  $m$ ,根据(1-63)式得

$$h(p_m, v_m, 1) - h(p_m, v_m, 0) - \frac{1}{2}(p_m - p_M)(v_m + v_M) = 0 \quad (1-81)$$

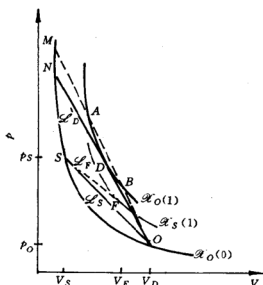


图 1-7 非定常燃烧的  $p-v$  平面

设  $OM$  与  $\mathcal{H}_o(1)$  交于  $n$ , 同样

$$h(p_n, v_n, 1) - h(p_o, v_o, 0) - \frac{1}{2}(p_n - p_o)(v_n + v_o) = 0 \quad (1-82)$$

由于  $O$  和  $M$  点皆位于  $\mathcal{H}_o(0)$  上, 故

$$h(p_M, v_M, 0) - h(p_o, v_o, 0) - \frac{1}{2}(p_M - p_o)(v_M + v_o) = 0$$

将此式代入 (1-82) 式

$$\begin{aligned} h(p_n, v_n, 1) - h(p_M, v_M, 0) + \frac{1}{2}(p_M - p_o)(v_M + v_o) \\ - \frac{1}{2}(p_n - p_o)(v_n + v_o) = 0 \end{aligned}$$

$M, O, m$  和  $n$  四点位于同一直线  $OM$  上, 上式写成

$$h(p_n, v_n, 1) - h(p_M, v_M, 0) - \frac{1}{2}(p_n - p_M)(v_n + v_M) = 0 \quad (1-83)$$

比较 (1-81) 式和 (1-83) 式,  $m$  点应与  $n$  点重合, 即  $OM, \mathcal{H}_o(1)$  和  $\mathcal{H}_M(1)$  同时相交或相切。因此, 无论采用  $\mathcal{H}_o(1)$  还是  $\mathcal{H}_M(1)$ , 方程的解不变, 从而保证了前节讨论的可靠性。

激波对火焰起诱导作用, 决定了火焰的诱导时间。火焰对激波起驱动作用, 提供传播所需的能量。两者完全耦合时, 激波自持, 这就是  $C-J$  爆轰波。如果激波较弱 ( $D < D_j$ ),  $\mathcal{H}_o(1)$  与  $\mathcal{H}_s(1)$  不再重合, 见图 1-7。激波传播速度与  $\mathcal{L}_s$  的斜率有关, 波后状态为  $S$ 。以该点为初始态的全反应 Hugoniot 曲线  $\mathcal{H}_o(1)$  与过  $S$  点的 Rayleigh 线  $\mathcal{L}_F$  切于  $F$  点, 有  $M=1$ 。火焰的传播速度与  $\mathcal{L}_F$  的斜率有关, 显然,  $|W_F| < |W_S|$ 。其中  $W_F, W_S$  分别为火焰与激波的 Lagrange 速度。不等式表明两波阵面之间出现质量积聚, 这使得流场不能定常。

设火焰的轨迹方程为  $x = x_F(\tau)$ ,  $\tau$  为时间。将坐标建立在火焰阵面上, 有

$$X = x - x_F(\tau)$$

方程 (1-49) 写成

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + U \frac{\partial p}{\partial X} + \rho a_f^2 \frac{\partial U}{\partial X} = \rho a_f^2 \Sigma$$

其中  $U = u - \frac{dx_f}{d\tau}$ 。方程(1-43)写成

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{d^2 x_f}{d\tau^2} \right) + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial p}{\partial X} = 0$$

由上述两式

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\rho a_f^2}{U} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{d^2 x_f}{d\tau^2} \right) \right\} + \left( 1 - \frac{1}{M} \right) U \frac{\partial p}{\partial X} = \rho a_f^2 \Sigma \quad (1-84)$$

其中  $M = \frac{U}{a_f}$ 。对于完全气体,反应过程中摩尔数不变时,则有

$$\rho a_f^2 \Sigma = \frac{pY_c \bar{Q}}{t_{ac} c_v T}$$

对于快速反应,  $t_{ac}$  值很小,与其它项相比,方程(1-84)中  $\{\}$  项可以忽略,此时方程(1-84)与方程(1-53)形式一致,故火焰处于准定常(或当地定常)状态。当反应缓慢时,  $\{\}$  项不可忽略,流场是非定常的。

### 1.3.2 非定常诱导区<sup>[8]</sup>

质点在激波压缩后经一段诱导时间才能点火,故紧随激波之后是诱导区。激波较弱时,诱导区的反应速率很低,是非定常区域。引进 Lagrange 坐标  $\psi = \int_0^x \rho dx$ , 对于完全气体,方程(1-42),方程(1-43)和方程(1-49)分别写成

$$v_t - u_p = 0 \quad (1-85)$$

$$u_t - p_p = 0 \quad (1-86)$$

$$\gamma(pu)_\psi = \gamma u p_\psi - v p_t + (8-1)\bar{Q}\dot{\psi} \quad (1-87)$$

其中脚标表示对该自变量求偏导。由(1-85)式和(1-87)式得

$$\gamma p v_t + v p_t = (\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi} \quad (1-88)$$

或  $\gamma R T_t - (\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi} = (\gamma - 1)v p_t \quad (1-89)$

由(1-85)式和(1-86)式得

$$v_u + p_{\psi\psi} = 0 \quad (1-90)$$

用脚标 1 表示激波波后值,因为诱导区参数变化很小,(1-89)式可

写成

$$\gamma RT_t - (\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi} \simeq (\gamma - 1)v_1 p_t \quad (1-91)$$

根据状态方程  $p_1 v_1 + v_1 p_t \simeq RT_t$ , 故(1-90)式写成

$$p_1 \{p_{rr} - p_u\} + RT_u \simeq 0$$

此式代入(1-91)式得

$$(\rho_1 a_{f_1})^2 [\gamma RT_t - (\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi}]_{rr} - [\gamma RT_t - \gamma(\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi}]_u = 0 \quad (1-92)$$

当  $p = \text{常数}$  时, 由(1-89)式得

$$\gamma RT_t - (\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi} = 0 \quad (1-93)$$

当  $v = \text{常数}$  时, 由(1-89)式和(1-88)式得

$$\gamma RT_t - \gamma(\gamma - 1)\bar{Q}\dot{\psi} = 0$$

因此方程(1-92)由两项组成, 第一项表示等压诱导, 第二项表示等容诱导。(1-92)式还可写成

$$\gamma R \{(\rho_1 a_{f_1})^2 (T_t)_{rr} - (T_t)_u\} - \gamma(\gamma - 1)\bar{Q} \{(\rho_1 a_{r_1})^2 \dot{\psi}_{rr} - \dot{\psi}_u\} = 0 \quad (1-94)$$

其中  $a_r = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T, Y_s}$ , 称为等温声速。方程(1-94)由两项组成, 第一项是温度变化速率的波动方程, 波速为冻结声速  $a_f$ , 第二项是化学反应速率的波动方程, 波速为等温声速  $a_r$ 。

如果采用 Arrhenius 反应速率公式, 并引进无量纲量  $T^* = \frac{T}{T_1}, \epsilon = \frac{T_1}{T_A}$ , 其中  $T_A = \frac{E_a}{R}$ , 由于诱导区的温度变化很小, 记  $T' = \frac{T - T_1}{\epsilon T_1} = \frac{T^* - 1}{\epsilon}$ , 于是

$$(T'_t - \gamma \exp T')_{rr} - (T'_t - \exp T')_{rr} = 0 \quad (1-95)$$

其中  $\tau = \frac{t}{t_{f1}}, \Psi = \dot{\psi} / (\rho_1 a_{f1} t_{f1}), t_{f1} = \frac{v_1 c_r T_1}{a_{f1}^2 \bar{Q}} \epsilon e^{\frac{1}{\epsilon}}$ 。根据(1-93)式  $t_{f1}$  为等压特征诱导时间。

### 1.3.3 准定常燃烧区<sup>[8,10]</sup>

质点一经点火, 反应速率急剧上升, 根据 1.3.1 节的讨论, 火

焰附近区域可视作局部定常。此时,火焰与激波皆稳定传播,但两者的传播速度不同。两阵面间的诱导区是非定常的,表现为激波对火焰的诱导。而燃烧阵面是定常的,表现为火焰对激波的反馈,即驱动作用。设  $\psi=0$  时  $u=0$ , 积分(1-87)式得

$$\begin{aligned} \gamma p u &\simeq \int_0^* (\gamma u p_s - v p_t) d\psi + (\gamma - 1) \bar{Q} \int_0^* \dot{\psi} d\psi \\ &= P + (\gamma - 1) q_{ch} \end{aligned} \quad (1-96)$$

在火焰坐标中

$$\int_0^* \dot{\psi} d\psi = \int_{-x_f(t)}^{x_s(t)-x_f(t)} U \lambda_x dX = \int_1^0 U d\lambda \simeq S_u$$

其中  $x_s(t)$  为火焰阵面前的某质点。因此

$$q_{ch} \simeq \bar{Q} S_u$$

表示  $x_s$  质点后, 化学反应给流场提供能量的速率。

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^{x_s(t)} p_t dx + (\gamma - 1) \int_0^{x_s(t)} u p_t dx \\ &= - (\gamma - 1) \left\{ \int_0^{x_s(t)} (e\rho)_t dx + \int_0^* \left( \frac{1}{2} u^2 \right)_t d\psi \right\} \end{aligned}$$

故

$$\bar{Q} S_u = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p u + \int_0^{x_s(t)} (e\rho)_t dx + \int_0^* \left( \frac{1}{2} u^2 \right)_t d\psi \quad (1-97)$$

该式说明反应释放的能量部分用来改变流场的能量密度, 部分用来改变质点的动能, 还有部分用来驱动流场, 其效果和活塞驱动类似。

假设激波与火焰皆为间断, 激波前与火焰后流场均匀, 密度在两波之间均匀分布<sup>[10]</sup>, 于是

$$\rho_2 x_f + \rho_1 (x_s - x_f) = \rho_0 x_s \quad (1-98)$$

脚标 0、1、2 分别表示激波前, 两波间和火焰后。  $x_f$ 、 $x_s$  分别表示火焰与激波的位置。当  $u_2=0$  时, 由(1-24)式至(1-26)式可知, 火焰两侧守恒方程为

$$S_u = \frac{\rho_2}{\rho_1} S_f \quad (1-99)$$

$$p_2 - p_1 = -(\rho_1 u_1)^2 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (1-100)$$

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (1-101)$$

其中  $h_1 = c_{p_1} T_1 + \bar{Q}$ ,  $h_2 = c_{p_2} T_2$ 。由于激波与火焰皆稳定传播,故  $\frac{x_f}{x_s} =$

$\frac{S_f}{D}$ , 将其代入(1-98)式得

$$M_f = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{a_0}{a_1} \right) M_s \left[ \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) / \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \quad (1-102)$$

其中  $M_f = \frac{S_f}{a_1}$ ,  $M_s = \frac{D}{a_0}$  分别为火焰与激波的马赫数。由(1-100)式与(1-101)式可得

$$M_f^2 = \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \frac{\gamma_1 \bar{Q}}{a_1^2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - 1}}{\frac{\gamma_2 \gamma_1}{\gamma_2 - 1} \left[ \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right] - \frac{\gamma_1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right]} \quad (1-103)$$

由绝热激波基本方程(1-58)、方程(1-59)和方程(1-65)可得

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1} \quad (1-104)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma_1 + 1) M_s^2}{2 + (\gamma_1 - 1) M_s^2} \quad (1-105)$$

$$\frac{u_1}{a_0} = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \cdot \frac{M_s^2 - 1}{M_s} \quad (1-106)$$

将(1-103)式、(1-104)式和(1-105)式代入(1-102)式可求得  $M_f$  与  $M_s$  的关系式,即可由火焰传播速度确定由其驱动的激波传播速度。

## 第二章 湍流燃烧

湍流是一种流动,其最大特征是具有随机性,即使对于无化学反应的湍流,这种特性迄今还未能找到合适的数学描述方法。对于化学反应流动,湍流与反应的相互影响,使得问题更为复杂。这是工程科学中最复杂的领域之一。

模式理论是现今工程界广为使用的湍流近似理论,其基本思路是把方程 Reynolds 分解,但分解后的方程是不封闭的,通过模化可使脉动关联量与平均量发生联系,从而达到封闭方程的目的。该理论推广到反应湍流时,化学反应项的指数非线性使该项的模化异常复杂。事实上湍流燃烧速率更多地决定于流动特性而非反应特性。因此,处理反应项时,可不对该项进行直接模拟,而是用流场的平均值和方差直接地或通过构造概率密度分布函数来描述。

本章内容包括:湍流的一般描述、起因和特性;不可压缩流和可压缩流的湍流模式理论,包括混合长度模型、单方程模型和双方程模型;湍流燃烧,讨论反应项的模化,包括概率密度分布函数法(PDF法),旋涡破碎模型和统计模型。

### 2.1 湍流

#### 2.1.1 涡量输运方程

不考虑化学反应时,方程(1-6)、方程(1-8)和方程(1-9)写成

$$\text{质量守恒方程} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-1)$$



$$\text{动量守恒方程} \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-2)$$

$$\text{能量守恒方程} \quad \rho \frac{De}{Dt} = \pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2-3)$$

不可压缩流体,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ , 故

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

于是方程(2-2)写成

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2-4)$$

将热力学关系式  $de = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$  代入(2-3)式得

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

或者写成

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{\Phi}{T} + \frac{k}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

式中第一项表示粘性耗散导致的熵增, 即粘性使流体机械能不可逆的转换为热能时产生的熵增;  $\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  称为耗散函数; 第二、第三项分别表示不可逆和可逆热传导导致的熵增。将热力学关系式  $dh = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp$  代入(2-3)式得

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

完全气体  $dh = C_p dT$ , 代入上式

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2-5)$$

动量方程(2-2)又称为 Navier—Stokes 方程, 将不可压缩流体的 Navier—Stokes 方程(2-4)写成矢量形式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2-6)$$

其中  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  称为运动粘性。将式中  $\frac{D\delta}{Dt}$  加以分解, 使涡量  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \delta$

分离出来

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

两端进行旋度运算, 由于不可压缩流动  $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\Omega}$ , 于是

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (2-7)$$

该式称为涡量输运方程。

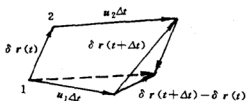


图 2-1 流体微元的运动

如图 2-1 所示, 设有线微元  $\delta r$  随体运动

$$\mathbf{u}_1 \Delta t + \delta r(t + \delta t) - \delta r(t) = \mathbf{u}_2 \Delta t$$

即

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \frac{D\delta r}{Dt}$$

其中  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{u}_2$  表示线微元两端点 1 和 2 的运动速度。

因为

$$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = (\delta r \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

故

$$\frac{D\delta r}{Dt} = (\delta r \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

在讨论(2-7)式右端第一项的物理意义时, 忽略粘性项

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

由上述两式

$$\frac{D}{Dt}(\delta r - \varepsilon \boldsymbol{\Omega}) = ((\delta r - \varepsilon \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (2-8)$$

其中  $\varepsilon$  为任一常数。

流场中每点都与涡量  $\boldsymbol{\Omega}$  相切的曲线叫涡线。设  $t=0$  时刻,  $\varepsilon r$  为涡线中的一段, 即  $\delta r = \varepsilon \boldsymbol{\Omega}$ 。此时方程(2-8)的解为

$$\delta r = \varepsilon \boldsymbol{\Omega}$$

该式说明涡量大小随涡线微元  $\delta r$  的长短而变化。 $\delta r$  伸长时,由涡线构成的涡管截面减小,涡量  $|\Omega|$  增大,旋转激烈,如图 2-2 所示。因此,  $(\Omega \cdot \nabla)u$  表示流体微元在涡量方向上拉伸或压缩时所导致的涡量的变化率。



图 2-2 涡量随涡管截面的变化

忽略方程(2-7)中的对流项

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \Omega \quad (2-9)$$

$\nu \nabla^2 \Omega$  称为涡量扩散项,该方程类似于热传导方程,由于  $\Omega$  是矢量,其分量的扩散将受到其它分量和  $\frac{D\Omega}{Dt}$  的影响,故扩散过程较标量复杂。

以二维平板边界层流动为例,如图 2-3 所示,记张量  $q = -\nu \nabla \Omega$  表示涡量的流率,有  $\frac{D\Omega}{Dt} = -\nabla \cdot q$ 。根据粘性流体的壁面

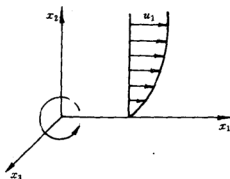


图 2-3 二维平板边界层的涡量扩散

附面条件,  $u_1=0, u_2=0, u_3=0, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}=0, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}=0$  和  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ll \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ , 故除  $\Omega_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  外, 涡量的其余分量皆为零, 即涡量平行于  $x_3$  轴, 于是  $q_3 = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} e_3$ , 其中  $e_3$  表示  $x_3$  轴的单位矢量。

将方程(2-4)写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

壁面处

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} e_2 = q_3$$

该式说明以  $x_3$  轴为旋转轴的涡量沿  $x_2$  轴的方向扩散。

参照 1.1.2 节, 不可压缩流涡量输运方程(2-7)的无量纲形式为

$$\frac{D\Omega^*}{Dt^*} = (\Omega^* \cdot \nabla^*) u^* + \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot \Omega^* \quad (2-10)$$

Reynolds 发现, 粘性流动可根据 Reynolds 数  $Re$  的大小分为两类<sup>[1]</sup>: 层流和湍流。  $Re \ll 1$  时为层流,  $Re \gg 1$  时为湍流。

根据方程(2-10),  $Re \ll 1$  时, 方程右端第二项即粘性耗散项是涡量变化的主要因素。  $Re \gg 1$  时, 方程右端第一项即流体在涡量方向上的拉伸和压缩是导致涡量变化的主要因素。大涡因拉伸破碎为小涡, 能量也因此在此旋涡间传递, 称为旋涡串级。

当  $\frac{D\Omega}{Dt} = 0$  时, 旋涡将不再拉伸, 即

$$(\Omega \cdot \nabla) u + \nu \nabla^2 \Omega = 0$$

根据量纲分析

$$|\Omega| \frac{u_T}{l_T} = |\Omega| \frac{\nu}{l_T^2}$$

若令  $Re_{\text{eddy}} = \frac{u_T l_T}{\nu}$ , 称为旋涡 Reynolds 数,  $u_T$  为旋涡特征速度,  $l_T$  为旋涡特征尺度。当  $Re_{\text{eddy}} < 1$  即  $l_T < l_{\min} = \frac{\nu}{u_T}$  时, 旋涡的拉伸将不再发生, 故  $l_{\min}$  是可拉伸旋涡的最小尺度。

## 2.1.2 湍流

### 一、湍流特性

湍流是普遍存在的一种流动现象,从被注意之日起,便带有某种不可预测的神秘性。百余年来,为探索其中奥秘,人们花费了巨大的精力。由于该现象过于复杂,迄今为止还很难给出确切的定义。一般来说,湍流应具有如下特性:

#### 1. 湍流是连续介质的一种流动现象

湍流来自于旋涡的破碎,当旋涡的尺寸小于极限值  $l_{\min}$  时,这种破碎将不再发生。如果取  $u_r = 10 \text{ m/s}$ ,  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , 有  $l_{\min} = 10^{-6} \text{ m}$ 。一个大气压下,气体分子的数密度为  $10^{29} \text{ 个/m}^3$ ,故在可拉伸的最小旋涡内可包含  $10^{11}$  个分子,连续介质模型仍然适用。因此,基于连续介质模型的粘性流体的守恒方程同样可以用来描述湍流。

湍流不是流体自身的特性,而是流动的一种特性。不同的流体可以具有不同的状态方程,但所有的流体,湍流动力学是相同的。

#### 2. 湍流是一种随机过程

湍流仍可用 Navier—Stokes 方程来描述,但方程中非线性惯性项的作用明显增大。由于惯性项与粘性项的相互影响所导致方程的失稳这使流场出现随机脉动,流场参数的分布具有随机性。

气体分子运动也是一种随机运动,描述这种运动的气体分子运动论是比较完善的理论。由于分子是稳定的个体,仅当分子碰撞时才有能量的传递,而这种碰撞作用时间极短,约  $10^{-11} \text{ s}$ 。人们可以建立分子间相互作用的模型(如刚球模型, Lennard—Jones 6~12 模型等等),并通过概率方程求得平衡态的分布函数,进而求得表征气体宏观状态的特征量,即随机过程的平均值。但湍流是通过旋涡破碎实现能量传递的,这一过程很难用数学描述。首先旋涡尺度在很大的范围内随机分布,大涡通常作近似有规律的运动,仅小涡才作随机运动。因此,旋涡的破碎过程伴随着确定运动向随机运动的转换。此外,旋涡破碎时间比分子碰撞时间长得多,在讨论能量传递时必须顾及其历史。因此,与分子热运动相比,湍流的研究要

困难得多。

3. 湍流是一种有旋的, 非线性的三维流动, 流动过程中伴随着能量的耗散

粘性流具有有旋性, 流动伴随着旋涡运动, 不可压缩流可用涡量输运方程(2-10)来描述。粘性流具有扩散性, 旋涡在流动过程中不断扩散, 方程(2-10)右端的第二项对应于这一过程。粘性流还具有耗散性, 流元在粘性剪应力的作用下变形, 致使机械能不可逆地变为热能, 在能量方程中用耗散函数  $\phi$  来描述。当方程(2-10)右端第一项占主导地位时, 旋涡的拉伸成为流动的主要特征, 该项是非线性的, 而且仅在三维流动中起作用。

对于二维流动, 如图 2-4 所示, 设  $x_3$  方向上的速度分量为零, 即  $u_3=0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_3}=0$ , 于是  $\Omega = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) e_3$ , 进而有  $(\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \Omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$ 。这说明二维流动时,  $\Omega$  平行于  $x_3$  轴, 因此仅存在涡量扩散, 不存在旋涡的拉伸。而旋涡的拉伸是湍流的主要特征之一, 因此湍流必须是三维的。与粘性流相比, 湍流具有更强的扩散性和更高的扩散速率。

## 二、湍流平均值和湍流强度

湍流是一种随机过程, 可用随机函数来描述<sup>[2]</sup>。设  $A(x, t)$  为描述某随机过程的随机变量。在空间某一位置, 对该过程进行  $n$  次测量, 可得到  $n$  根测试曲线  $A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)$ , 称它们为随机函数的实现, 如图 2-5 所示。如果对某一实现  $A_i(t)$  求时间平均值

$$\bar{A} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} A_i(t) dt}{T}$$

于是

$$A = \bar{A} + A'$$

其中  $A'$  表示随机量对平均值的偏离, 称为脉动值。如果在某一确定时刻  $t$ , 对所有实现求平均值, 则

$$\langle A \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$$

称此为系踪平均值。同样有  $A = \langle A \rangle + A'$

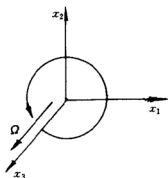


图 2-4 二维流动的涡量

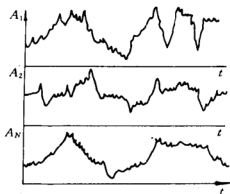


图 2-5 随机过程的实现

平稳随机过程具有各态历经的特性,其时间平均值等于系踪平均值,统记作  $\bar{A}$ 。引进指示函数  $\Phi$

$$\Phi(A(n)) = \begin{cases} 1 & A(n) < A \\ 0 & A(n) > A \end{cases}$$

其中  $A$  为任意指定值,如图 2-6 所示。积分此式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \Phi dn = N_L$$

因此,函数值小于  $A$  的事件的出现概率  $P(A)$  为

$$P(A) = \frac{N_L}{N} = \bar{\Phi}$$

$P$  称为概率分布或积分形式的概率密度分布函数,其图形如图 2-7 所示,且有  $0 \leq P \leq 1$ 。

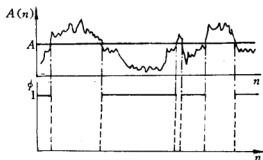


图 2-6 指示函数

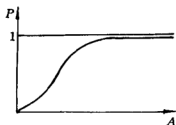


图 2-7 概率密度分布函数

$$\text{令 } \mathcal{P}(A) = \frac{dp}{dA}$$

$$\Delta P = \mathcal{P} \Delta A = P_{\text{rob}}(A(N) < A + \Delta A) - P_{\text{rob}}(A(N) < A)$$

它表示函数值在  $A$  与  $A + \Delta A$  之间的事件出现的概率。 $\mathcal{P}(A)$  称为微分形式的概率密度分布函数, 简称概率密度分布函数, 记作  $PDF$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(A) dA = 1$$

随机量的平均值可以通过相应的  $PDF$  求得

$$\bar{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \mathcal{P}(A) dA$$

为了更好的描述随机过程, 引进统计矩的概念

$$\bar{A}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} A^n \mathcal{P}(A) dA$$

称为  $n$  阶原点矩, 平均值是一阶原点矩。

$$\bar{A}'^n = \int_{-\infty}^{+\infty} (A - \bar{A})^n \mathcal{P}(A) dA$$

称为  $n$  阶中心矩, 显然  $\bar{A}' = 0$ ,  $\bar{A}'^2 \neq 0$ 。记  $A'_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{A}'^2}$  称为均方差, 常用来描述随机过程对平均值的偏离程度。

对于湍流, 平均值可用来表征流场的平均特性, 但不能描述其脉动强度。为此, 需引进与 2 阶中心矩有关的物理量, 称为湍流强度, 其定义式为

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2_1} + \overline{u'^2_2} + \overline{u'^2_3})}}{\bar{u}}$$

其中  $\bar{u} = \sqrt{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}$ , 或者定义为

$$I_i = \frac{u'_{\text{rms}}}{\bar{u}}$$

此值越大, 流场的脉动强度越高。

### 三、旋涡尺度和旋涡寿命<sup>[3]</sup>

无论是原点矩还是中心矩都是对某一特定时间(如果取系踪



平均值)或特定位置(如果取时间平均值)而言的,是讨论某一确定随机过程的,故不能反映不同时刻或不同位置某随机变量的相互影响以及不同随机过程的相互影响。为了描述随机过程的相关特性,引进相关函数的概念。对于随机过程  $A$ , 相关指示函数为

$$\Phi_1(A_1)\Phi_2(A_2) = \begin{cases} 1 & \text{当 } A_1 < A^{(1)} \text{ 和 } A_2 < A^{(2)} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

其中脚标 1, 2 分别表示  $t_1$  和  $t_2$  时刻(或  $\tau_1$  和  $\tau_2$  点),  $A^{(1)}, A^{(2)}$  表示任意指定值。

$$P = \overline{\Phi_1(A_1)\Phi_2(A_2)} = P_{rob}(A_1 < A^{(1)} \text{ 和 } A_2 < A^{(2)})$$

表示  $A_1 < A^{(1)}$  和  $A_2 < A^{(2)}$  的事件出现的概率, 与之相应的概率密度分布函数为  $\mathcal{P}(A_1, A_2) = \frac{\partial^2 P}{\partial A_1 \partial A_2}$ 。其原点矩为

$$\overline{A_1^m A_2^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1^m A_2^n \mathcal{P}(A_1, A_2) dA_1 dA_2$$

称  $\overline{A_1 A_2}$  为自相关函数。

如果考虑两种随机过程  $A$  和  $B$ , 相关指示函数为

$$\Phi_A(A)\Phi_B(B) = \begin{cases} 1 & \text{当 } A < A^{(1)} \text{ 和 } B < B^{(1)} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

$$P(A, B) = \overline{\Phi_A(A)\Phi_B(B)} = P_{rob}\{A < A^{(1)} \text{ 和 } B < B^{(1)}\}$$

表示  $A < A^{(1)}$  和  $B < B^{(1)}$  的事件出现的概率, 与之对应的概率密度分布函数为  $\mathcal{P}(A, B) = \frac{\partial^2 P}{\partial A \partial B}$  称  $\overline{AB} = \int_{-\infty}^{+\infty} AB \mathcal{P}(A, B) dA dB$  为交叉相关函数。

在讨论空间任意两点速度脉动间的影响时, 记

$$\mathcal{R}(r) = \frac{\overline{u'_A u'_B}}{u'_{A-rms} u'_{B-rms}}$$

称为空间自相关系数, 脚标  $A, B$  表示空间任意两点, 其距离为  $r$ 。由于湍流脉动是随机的,  $u'$  可能取正值也可能取负值, 故  $\overline{u'_A u'_B} \leq \sqrt{\overline{u'^2_A}} \cdot \sqrt{\overline{u'^2_B}}$ , 即  $R(r) \leq 1$ 。 $r$  愈小, 两点间脉动的相互影响愈大, 当  $B \rightarrow A$  时, 两点以同一振幅和振频脉动, 故  $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{R}(r) \rightarrow 1$ 。 $r$  增大时, 脉动的相互影响减小。故  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{R}(r) \rightarrow 0$ 。由上式

$$l_T = \int_0^{\infty} \mathcal{R}(r) dr$$

如图 2-8 所示, 图中方块面积等于  $\int_0^{\infty} \mathcal{R}(r) dr$ ,  $l_T$  称为旋涡尺度, 它表示假想湍流微团的大小, 该微团具有相同的脉动幅度和脉动频率, 视为一个运动整体。

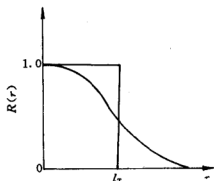


图 2-8 湍流尺度

如果讨论空间某点任意两时刻速度脉动的相互影响, 记

$$\mathcal{R}_{(t)}^* = \frac{u'(t)u'(t + \Delta t)}{u'_{L, rms} \cdot u'_{t + \Delta t, rms}}$$

称为时间自相关系数。进而有

$$t^* = \int_0^{\infty} \mathcal{R}^*(t) dt$$

$$l_T^* = u'_{rms} \cdot t^*$$

其中  $t^*$  表示具有相同脉动速度和频率的假想湍流微团所能存在的时间, 即湍流微团的寿命。  $l_T^*$  表示假想湍流微团在解体或丧失整体性之前经过的路程, 其大小与湍流尺度  $l_T$  同一量级。

## 2.2 湍流模型

### 2.2.1 Reynolds 分解

湍流既然可以用 Navier—Stokes 方程来描述, 能否直接求其数

值解以模拟湍流现象呢?为了保证计算的空间分辨率,计算网格的空间步长  $\Delta r$  必须小于某临界值  $\Delta r_c$ 。根据相似理论和量纲分析, Kolmogoroff 认为  $\Delta r_c = L_0 Re^{-\frac{3}{4}}$ , 其中  $L_0$  为特征长度。因此流场  $Re$  数愈大,空间步长应愈小。湍流对应于高  $Re$  数,如果取  $Re = 10^4$ , 有  $\Delta r_c = L_0 10^{-3}$ 。湍流又是三维流动,故空间格点数  $N_{space} > \left( \frac{L_0}{\Delta r_c} \right)^3 \sim 10^9$ 。计算网格的时间步长  $\Delta t = \frac{\Delta r_c}{U_0}$ , 其中  $U_0$  为特征速度,故时间格点数  $N_{time} > \frac{L_0}{U_0 \Delta t} \sim 10^3$ 。因此,模拟湍流问题所需的总格点数  $N_{total} = 10^{12}$ 。如此庞大的计算迄今尚无法进行。

为了简化,可用平均值的概念对守恒方程进行分解,由于方程非线性,分解后出现了关于脉动量的相关量,这些量是未知的,使得关于平均值的方程不封闭。所谓湍流的模式理论就是通过一定的模型使脉动相关量与流场的平均值发生联系,从而使方程封闭。这一理论因相对简单而得到广泛的应用。

先讨论不可压缩流动

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

该方程称为瞬时 Navier—Stokes 方程。将方程中的瞬时量进行分解,即  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ ,  $p = \bar{p} + p'$ ,  $\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}$ , 代入质量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u'_i) = 0$$

进而有

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} \quad (2-11)$$

将(2-4)式分解后

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (2-12)$$

对上式取平均值,将(2-11)式代入得

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} + \tau'_{ij}) \quad (2-13)$$

其中  $\tau'_{ij} = -\rho R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  称为湍流的 Reynolds 应力。

(2-12)减(2-13)可得

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (2-14)$$

由于  $u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j u'_i)$ , 故上式写成

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) \quad (2-15)$$

这是一个关于脉动量的守恒方程,称为脉动动量方程。上式亦可写成

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) \quad (2-16)$$

$u'_i \times (2-15)$ 式 +  $u'_i \times (2-16)$ 式,再取平均值得

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ik} = P_{ik} + T_{ik} - D_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_j} J_{ijk} \quad (2-17)$$

其中  $R_{ik} = \overline{u'_i u'_k}$ 。

$P_{ik} = - \left( R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} + R_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$  称为剪力产生项,表示湍流应力相应于平均运动的变形所作的功,它使宏观运动的动能转变为湍流脉动的动能。

$T_{ik} = \frac{1}{\rho} \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)}$  称为压力应力项, 表示脉动压力相应于脉动变形所作的功。

$D_{ik} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}$  称为粘性耗散项。

$J_{ijk} = -\nu \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ik} + \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} (\overline{u'_i p'} \delta_{ij} + \overline{u'_i p'} \delta_{jk})$  称为粘性扩散项。其中第一项为分子扩散项, 表示粘性应力对流团作的功; 第二项为 Reynolds 应力湍流扩散项, 表示湍流导致的脉动动能的扩散; 带括号的第三项为压力功湍流扩散项, 表示脉动压力做功导致脉动动能的扩散。

该方程称为 Reynolds 应力输运方程。这是一个关于二阶相关量  $R_{ij}$  的方程, 该方程中含有三阶相关量  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ 。同样的方法可以推得三阶相关量的方程, 但其中又会出现四阶相关量。方程的非线性使 Reynolds 分解后的方程始终不能封闭, 称此为湍流的封闭问题。

## 2.2.2 湍流模型

Reynolds 分解后的时均方程中含有脉动量的相关量, 相关量的输运方程又出现高阶相关量, 这使得守恒方程组不能封闭。为了解决这一问题, 对这些相关量提出各种半经验的假定, 使之与平均值发生联系, 这种所谓模式理论广泛用来讨论湍流问题<sup>[4,5]</sup>。

粘性剪应力可写成

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

对于 Reynolds 时均方程(2-13)有

$$\frac{\overline{\tau_{ij}}}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

仿照此式, Boussinesq 将 Reynolds 应力写成

$$\frac{\overline{\tau'_{ij}}}{\rho} = -R_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij}$$

称为 Boussinesq 旋涡粘性模型。其中  $\nu_t$  为湍流运动粘性, 它是用平均速度梯度表示湍流应力时人为引进的系数, 仅与湍流状态有关。而运动粘性  $\nu$  则与流体的物性有关。  $K = \frac{1}{2} \overline{u'^2}$  为湍流脉动动能, 方程右端第一项强调湍流应力表达式与层流应力表达式的一致性, 第二项反映了  $i=j$  时湍流应力仍不为零的事实。

### 一、零方程模型

根据气体分子运动论,  $\nu = \frac{1}{2} l v$ , 其中  $l$  为分子运动的平均自由程,  $v$  为分子运动的平均速度。Prandtl 同样将  $\nu_t$  写成

$$\nu_t = l_m u_i \quad (2-18)$$

其中  $l_m$  为湍流旋涡的特征长度,  $u_i$  为湍流旋涡的特征速度。

Prandtl 提出的混合长度模型将特征速度定义为

$$u_i = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right|$$

代入(2-18)式得

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right|$$

进而有

$$\frac{\tau'_{ij}}{\rho} = l_m^2 \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2-19)$$

尽管  $l_m$  仍是一个需要确定的量, 但该模型已将湍流求解问题简化为确定  $l_m$  的简单问题。

对于壁面湍流, 边界层分三个区域: 外层湍流, 内层湍流和底层层流。Van Driest 给出内层湍流和底层层流的公式为

$$l_m = Cy \left( 1 - \exp \left( \frac{y \tau_w^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}}{A \mu} \right) \right) \quad (2-20)$$

其中  $C$  为比例常数, 其值为  $C = 0.39 \sim 0.41$ ,  $A$  为修正系数, 平板时为  $A = 26$ ,  $\tau_w$  为壁面剪应力。定义摩擦速度  $u_0^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ , 上式写成

$$l_m = Cy \left( 1 - \exp \frac{y u_0^*}{A \nu} \right)$$

此时

$$\mu_i = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

Cebeci—Smith<sup>[6]</sup>用如下方法求  $\mu_t$

$$\mu_t = \min(\mu_{ti}, \mu_{t0})$$

其中 
$$\mu_{ti} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

$$\mu_{t0} = 0.00618 \rho \mu_e \delta^*$$

$$l_m = 0.4yD^*$$

$$D^* = 1 - \exp(-\sqrt{\rho_e \tau_w} y / (26\mu_e))$$

脚标  $e$  和  $w$  分别表示边界层外的主气流和壁面,  $\delta^*$  为边界层排移厚度。

对于管内湍流, Nikuradse 根据实验得

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \quad (2-21)$$

其中  $R$  为圆管半径,  $y$  是管内一点到管壁的距离。

## 二、单方程模型

有两个重要的物理量, 一个叫湍流脉动动能  $K = \frac{1}{2} R_e =$

$\frac{u_1'^2}{2} + \frac{u_2'^2}{2} + \frac{u_3'^2}{2}$ , 它表示湍流脉动所具有的能量。另一个叫湍流耗散

率  $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \tau'_{ij} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$ , 它表示湍流能量的耗散。如前所述, 耗散函数  $\Phi$  表示粘性流动的能量耗散

$$\frac{\Phi}{\rho} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \varepsilon$$

方程右端第一项表示宏观运动导致的能量耗散, 第二项表示湍流导致的能量耗散, 即湍流耗散率。对于不可压缩流动

$$\frac{\Phi}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \nu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)$$

如果流场中任何一点作坐标旋转或对任一矢量作坐标平面的反射时, 湍流的平均值不变, 称此为各向同性湍流, 小涡湍流就被视作各向同性。对此有

$$\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} = 0$$

故

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

Prandtl 假设湍流所有的特征尺度,包括湍流特征速度  $u_t$ ,特征长度  $l_m$  和特征时间  $t_\tau$ ,都由  $K$  和  $\varepsilon$  两个物理量来决定,根据量纲分析

$$\begin{aligned} u_t &\propto \sqrt{K} \\ l_m &\propto \frac{K^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \\ t_\tau &\propto \frac{K}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2-22)$$

将此代入(2-18)式

$$v_t = C_\mu K^{\frac{1}{2}} l_m$$

其中  $C_\mu$  为比例常数。于是

$$-\overline{u'_i u'_j} = C_\mu K^{\frac{1}{2}} l_m \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-23)$$

当方程(2-16)中  $i=k$  时

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) K = \frac{1}{2} P_{ii} - \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} J_{uij} \quad (2-24)$$

其中  $P_{ii} = -2 \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  可用(2-22)式来模化。根据(2-23)式  $\varepsilon = C_1 K^{\frac{3}{2}} / l_m$ ,  $C_1$  为比例常数。

$J_{uij} = -2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} K + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{2}{\rho} \overline{p' u'_j}$  其中  $\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j}$  表示脉动动能的扩散流率,反映了脉动动能的输运。输运现象通常与相关物理量的梯度有关,如果湍流输运也采用这种梯度公式,则有

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j}$$

于是方程(2-24)写成

$$\frac{DK}{Dt} = C_\mu K^{\frac{1}{2}} l_m \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_1 \frac{K^{\frac{3}{2}}}{l_m} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (2-25)$$



此方程称为湍流脉动方程或简称为  $K$  方程, 其中  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , 当常数  $C_\mu, C_1, \sigma_K$  和  $l_m$  选定后, 它与 Reynolds 时均方程 (2-13) 组成封闭方程。称此模型为单方程模型或  $K$  模型。

### 三、双方程模型

对脉动动量方程 (2-14) 进行如下运算, 即

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial (2-14)}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial t} \right)} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} \\ &= - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)} - \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)} + \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right)} \\ & \quad - \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \bar{u}'_i \bar{u}'_j) \right)} \end{aligned} \quad (2-26)$$

采用各向同性近似

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial t} \right)} = \frac{1}{2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ & \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} = \frac{\bar{u}_j}{2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \\ & - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right)} \right) \\ & - \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)} = - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\ & \quad + \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\ & - \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \bar{u}'_i \bar{u}'_j) \right)} = - \left\{ \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{1}{2\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j \varepsilon'} \right\} \end{aligned}$$

假设  $\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} = 0$ , 由 (2-26) 式得

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( - \varepsilon' u'_j - \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \\ & \quad - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \end{aligned} \quad (2-27)$$

该式右端第一, 二项为湍流扩散项, 采用梯度模拟

$$-\overline{\varepsilon' u_j'} - \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = C_\varepsilon \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$$

其中  $C_\varepsilon$  为无量纲常数, 式中  $\frac{K^2}{\varepsilon}$  出于量纲方面的考虑。由(2-18)式和(2-22)式得

$$v_i = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (2-28)$$

于是

$$-\overline{\varepsilon' u_j'} - \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$$

其中  $\sigma_\varepsilon$  为常数。第三项为粘性扩散项。第四、五项称为消耗项, 可视为  $K$  的产生 (Prod  $K$ ) 和  $K$  的耗散 ( $\varepsilon$ ) 之差

$$\text{Dest term} = -2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} - 2\nu \overline{\left( \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{t_\tau} (\text{Prod } K - \varepsilon)$$

其中  $C_{\varepsilon 2}$  为无量纲常数。参照方程(2-24)中的  $P_{ii}$ , 有  $\text{Prod } K \propto \overline{u_i' u_j'}$ ,  $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$ , 故

$$\text{Dest term} = -C_{\varepsilon 1} \left( \frac{\varepsilon}{K} \right) \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

其中  $\overline{u_i' u_j'} = -v_i \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$ 。于是方程(2-27)和方程(2-25)最终写成

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{K} \left( C_{\varepsilon 1} v_i \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \quad (2-29)$$

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{v_i}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + v_i \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (2-30)$$

时均方程(2-13),  $K$  方程(2-30),  $\varepsilon$  方程(2-29)以及方程(2-28)组成封闭方程。其中待定常数  $C_\mu, \sigma_\mu, \sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}$  和  $C_{\varepsilon 2}$  由特定情况的分析或实验来确定。通常取  $C_\mu = 0.09, \sigma_\mu = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_{\varepsilon 1} = 1.41 \sim 1.45, C_{\varepsilon 2} = 1.9 \sim 1.92$ , 称上述模型为双方程模型或  $K-\varepsilon$  模型。

#### 四、能量方程的模化

$$\text{能量方程} \quad \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

亦可写成  $\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$

对于不可压缩流由于  $C_v = C$ , 和  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2-31)$$

记  $T = \bar{T} + T'$ ,  $\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}$ ,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ , 对上述方程 Reynolds 分解

$$\rho C_v \frac{D\bar{T}}{Dt} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) - C_v \rho \overline{u'_i T'} \quad (2-32)$$

或

$$\rho C_v \frac{D\bar{T}}{Dt} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) - \rho C_v \overline{u'_i T'} + \rho \epsilon \quad (2-33)$$

其中  $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$ ,  $\frac{D\bar{T}}{Dt} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$ 。

如果采用梯度模拟

$$-\overline{u'_i T'} = \frac{k_T}{\rho C_v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\nu_T}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (2-34)$$

其中  $\sigma_T = \frac{\nu_T}{\alpha_T}$  称为湍流 Prandtl 数,  $\alpha_T = \frac{k_T}{\rho C_v}$ , 通常取  $\sigma_T = 0.7$ 。

## 2.2.3 可压缩湍流

### 一、Favre 平均值和方程的分解

可压缩流采用密度加权平均值又称为 Favre 平均值。对于随机变量  $A$

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\rho A}}{\bar{\rho}} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T+t} \rho A dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T+t} \rho dt} \quad (2-35)$$

和

$$A = \tilde{A} + A''$$

其中  $-$  表示时间平均值,  $\sim$  表示 Favre 平均值,  $''$  表示相对于 Favre 平均值的脉动值。因为  $\rho A = \rho \tilde{A} + \rho A''$ ,  $\overline{\rho A} = \overline{\rho \tilde{A}} + \overline{\rho A''}$ , 代入 (2-35) 式得

$$\overline{\rho A''} = 0 \quad (2-36)$$

亦可写成

$$\overline{A''} = - \frac{\overline{\rho' A''}}{\overline{\rho}}$$

由于  $\overline{A} = \overline{A + A''} = \tilde{A} + \overline{A''}$

$$\tilde{A} - \overline{A} = \frac{\overline{\rho' A''}}{\overline{\rho}}$$

在  $\overline{A + A'} = \tilde{A} + A''$  两端乘  $\rho$  后取平均值, 由于  $\overline{\rho A''} = 0$ ,  $\overline{\rho A'} = \overline{(\rho + \rho') A'} = \overline{\rho' A'}$

$$\tilde{A} - \overline{A} = \frac{\overline{\rho' A'}}{\overline{\rho}}$$

因此 Favre 平均值与时间平均值的差为

$$\tilde{A} - \overline{A} = \frac{\overline{\rho' A''}}{\overline{\rho}} = \frac{\overline{\rho' A'}}{\overline{\rho}} \quad (2-37)$$

对于总焓  $H = h + \frac{1}{2} u_i u_i$

$$\overline{\rho H} = \overline{\rho h} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i}$$

由于  $u_i = \tilde{u}_i + u_i''$

$$\overline{\rho H} = \overline{\rho h} + \frac{1}{2} \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_i} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$$

将  $\overline{\rho H} = \overline{\rho \tilde{H}}$  和  $\overline{\rho h} = \overline{\rho \tilde{h}}$  代入上式

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\overline{\rho}}$$

由于  $H = \tilde{H} + H''$

$$H'' = h'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' - \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\overline{\rho}} \quad (2-38)$$

可压缩流守恒方程分解时, 压力  $p$ 、粘性剪应力  $\tau_{ij}$  和热流率矢量  $q$  用时间平均值, 温度  $T$ 、速度  $u$  和总焓  $H$  用 Favre 平均值, 有

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2-39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ij}} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho h}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho h u_j})}_{(I)} &= \underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}_{(II)} + \underbrace{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}_{(III)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{-q_j})}_{(IV)} - \underbrace{\overline{\rho h'' u_j''}}_{(V)} \\
 &\quad + \underbrace{\overline{\tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_{(VI)} \quad (2-41)
 \end{aligned}$$

其中(I)表示单位体积的焓的变化率,(II)表示宏观运动的压力功,(III)表示湍流脉动的压力功,(IV)表示热传导,(V)表示单位体积的焓的湍流扩散,(VI)表示能量耗散。

由  $\tilde{u}_i \times (\tilde{u}_i$  的动量方程) +  $\tilde{u}_i \times (\tilde{u}_j$  的动量方程)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k}) &= -\tilde{u}_j \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) - \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{ik}} - \overline{\rho u_i'' u_k''}) \\
 &\quad + \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{jk}} - \overline{\rho u_j'' u_k''}) \quad (2-42)
 \end{aligned}$$

当  $i=j$  时

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left( \bar{\rho \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2}} \right)}_{(I)} = \underbrace{-\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{(II)} + \underbrace{\tilde{u}_i \frac{\partial \overline{\tau_{ii}}}{\partial x_i}}_{(III)} - \underbrace{\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_i'' u_i''})}_{(IV)} \quad (2-43)$$

其中(I)表示平均动能变化率,(II)表示平均压力作的功,(III)表示平均粘性剪应力作的功,(IV)可拆为两项,即  $-\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho u_i'' u_i''} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_i''}) + \overline{\rho u_i'' u_i''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$ , 第一项表示湍流脉动导致平均动能的传递,第二项表示湍流能量的生成。

## 二、湍流模型

由  $u_j \times (u_i$  的动量方程) +  $u_i \times (u_j$  的动量方程)

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{u}_j + u_j'')) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{u}_j + u_j'')(\tilde{u}_k + u_k'')) \\
 &= -(\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - (\tilde{u}_i + u_i'') \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial \overline{\tau_{ik}}}{\partial x_k} + (\tilde{u}_i + u_i'') \frac{\partial \overline{\tau_{jk}}}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

取时间平均值且减去(2-42)式

$$\frac{D}{Dt}(\overline{\rho u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}) = -\overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \overline{\tau_{ik}}}{\partial x_k}}$$

$$+ \overline{u_i'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$$

当  $i=j$  时

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k'' \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}}_{(II)} = \underbrace{- \overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}}}_{(III)} + \underbrace{\overline{u_i'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}}}_{(IV)} - \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}_{(V)} \quad (2-44)$$

式中(I)表示湍流动能变化率,(II)表示脉动能量的扩散,(III)表示脉动压力功,(IV)表示脉动粘性应力功,(V)表示湍流能量的生成。由于

$$\tilde{u}_i u_j = (\bar{u}_i + u_i'')(\bar{u}_j + u_j'') = \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \overline{u_i'' u_j''}$$

根据定义 
$$\tilde{u}_i u_j = \frac{\overline{\rho u_i u_j}}{\rho} = \frac{\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\rho}$$

故该项中 
$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = \rho \overline{u_i'' u_j''}$$

令  $K = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$ , (2-44)式可写成

$$\bar{\rho} \frac{DK}{Dt} + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' u_k''} = - \overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}} - \bar{\rho} \overline{u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$$

分解右端第一项,且忽略  $\rho' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}$

$$\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} u_i''}$$

采用梯度模拟

$$- \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' u_i''} + \frac{1}{\rho} \overline{\rho' u_i''} = - \frac{\nu_i}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_k}$$

$$\overline{\rho' u_i''} = \nu_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i}$$

对于不可压缩流,湍流各向同性时

$$\frac{\partial \overline{u_i'' \tau'_{ij}}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_i \frac{\partial K}{\partial x_j}$$

将其推广到可压缩流 
$$\frac{\partial \overline{u_i'' \tau'_{ik}}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \nu_i \frac{\partial K}{\partial x_k}$$

于是  $K$  方程写成

$$\bar{\rho} \frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \varepsilon \quad (2-45)$$

同样推得  $\varepsilon$  方程

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left( \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) \\ & - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (2-46)$$

采用 Boussinesq 假设, 则有

$$\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \left\{ \bar{\rho} K + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right\} - \mu_t \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\} \quad (2-47)$$

对于能量方程, 梯度模拟时

$$\overline{\rho h'' u_j''} = - \frac{\mu_T}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}$$

故

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{h}}{Dt} = \frac{D\bar{p}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu_T}{\sigma_T} + \frac{\mu}{P_r} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right\} + \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho} \varepsilon \quad (2-48)$$

其中  $\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}$ , 式中常数通常取  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.30$ ,  $\sigma_T = 0.7$ 。

## 2.3 湍流燃烧

湍流对燃烧的影响与湍流尺度有关。如图 2-9 所示, 小尺度的湍流通过湍流扩散使火焰反应区内的输运效应增加, 从而改变其化学反应速率。大尺度的湍流则使“层流”火焰的阵面出现皱折, 增加其燃烧面积, 造成火焰传播速度的增加。

燃烧对湍流的影响表现在以下两个方面: 一方面燃烧释放的热使流团膨胀, 从而导致当地涡量的减少, 湍流强度下降; 另一方

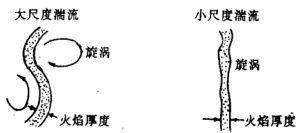


图 2-9 湍流尺度对火焰阵面结构的影响

面,一个区域的燃烧又会导致其它区域的湍流增强。

旋涡的拉伸和破碎是湍流的主要特征之一,Chomiak<sup>[7]</sup>认为旋涡主要集中在强拉伸区域,如果这种区域出现转移,集中在此处的旋涡则向四周扩散并在新的强拉伸区域重新集结。即使初始时刻涡量均匀的流场,其后也会出现局部区域的旋涡集结<sup>[8]</sup>, $Re$  数愈大,该现象愈明显。一般来讲,湍流中所有与分子运动有关的过程,如湍流动能的粘性耗散、分子运动引起的混合与热交换、化学反应等都发生在这类集结区域。

### 2.3.1 反应速率的直接封闭<sup>[3]</sup>

燃烧的能量守恒方程和组元守恒方程中都含有与化学反应速率有关的源项。如果用 Arrhenius 公式表示

$$\omega_s = k \rho^n \prod_i Y_i^{m_i}$$

式中  $\omega_s$  表示组分  $S$  的反应速率,即单位时间单位体积内组分  $S$  的变化量,  $Y_i$  为组分  $i$  的质量分数,  $m = \sum m_i$  为反应级数,  $\Pi$  为连乘符号,  $k = BT^n \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$  为化学反应速率常数,其中  $B$  为常数,  $E_a$  为活化能,  $R$  为普适气体常数。

讨论反应级数为2的不可逆反应

$$\omega_r = BT^n \rho^2 Y_r Y_o \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$



脚标  $F, O$  分别表示燃料和氧化剂。

对于完全气体

$$\omega_F = \frac{B_F^2}{R^2} T^{a-2} \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) Y_F Y_O$$

对其 Reynolds 分解

$$\overline{\omega_F} = \frac{B_F^2}{R^2} \overline{T}^{a-2} \exp\left(-\frac{E}{R\overline{T}}\right) \overline{Y_F} \overline{Y_O} (1 + F) \quad (2-49)$$

其中

$$F = \frac{\overline{Y'_F Y'_O}}{\overline{Y_F} \overline{Y_O}} + (P_2 + Q_2 + P_1 Q_1) \frac{\overline{T'}^2}{\overline{T}^2} + (P_1 + Q_1) \left( \frac{\overline{T' Y'_F}}{\overline{T} \overline{Y_F}} + \frac{\overline{T' Y'_O}}{\overline{T} \overline{Y_O}} \right) \\ + P_1 \frac{\overline{T' Y'_F Y'_O}}{\overline{T} \overline{Y_F} \overline{Y_O}} + P_2 \left( \frac{\overline{T'^2 Y'_F}}{\overline{T}^2 \overline{Y_F}} + \frac{\overline{T'^2 Y'_O}}{\overline{T}^2 \overline{Y_O}} \right) + (P_3 + Q_3) \frac{\overline{T'^3}}{\overline{T}^3} + \dots$$

$$P_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{(n-1)!}{(n-k)! ((k-1)!)^2 k} \left( \frac{E_a}{R\overline{T}} \right)^k$$

$$Q_n = \frac{(a-2)(a-1)\dots(a+1+n)}{n!}$$

仅当  $\frac{E_a}{R\overline{T}} < 1$ ,  $\frac{T'}{\overline{T}}$  很小时, 上述级数才收敛。故 (2-49) 式具有很

大的局限性, 对  $\frac{E_a}{R\overline{T}} > 1$  的情形不适用。

级数收敛的情况下, 如果忽略三阶以上的关联项

$$F = \frac{\overline{Y'_F Y'_O}}{\overline{Y_F} \overline{Y_O}} + (P_2 + Q_2 + P_1 Q_1) \frac{\overline{T'}^2}{\overline{T}^2} + (P_1 + Q_1) \left( \frac{\overline{T' Y'_F}}{\overline{T} \overline{Y_F}} + \frac{\overline{T' Y'_O}}{\overline{T} \overline{Y_O}} \right)$$

此时仅二阶关联项需要模化, 采用梯度模拟

$$\overline{Y'_F Y'_O} = C_Y \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \overline{Y_F}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{Y_O}}{\partial x_j}$$

$$\overline{T' Y'_F} = C_{YF} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{Y_F}}{\partial x_j}$$

$$\overline{T' Y'_O} = C_{YO} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{Y_O}}{\partial x_j}$$

$$\overline{T'^2} = C_T \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right)^2$$

其中,  $C_i, C_{iF}, C_{iO}, C_T$  的数量级均为 0.1。

## 2.3.2 概率密度分布函数(PDF)

### 一、守恒量<sup>[3]</sup>

由 1.1.1 节, 多组分反应系统的组元守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_F) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j Y_F) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial Y_F}{\partial x_j} \right) - \omega_F \quad (2-50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_O) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j Y_O) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial Y_O}{\partial x_j} \right) - \omega_O \quad (2-51)$$

当  $M^2 \ll 1, L_e = 1$ , 且忽略介质压缩性时, 能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j C_p T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial C_p T}{\partial x_j} \right) + \omega_F Q_F \quad (2-52)$$

$Q_F$  为单位质量的燃料燃烧释放的热。

设基于质量的燃烧计量方程为



其中  $O, F, P$  分别表示氧化剂、燃料和燃烧产物,  $\beta$  为计量函数。引进 Shvab—Zeldovich 耦合变量

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_F}{\beta} - Y_O \\ C_p T + Y_F Q_F \end{pmatrix}$$

由守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j Z) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial Z_i}{\partial x_j} \right) \quad (2-53)$$

其中  $\Gamma$  称为输运系数, 该方程  $\Gamma = \rho D$ 。凡满足形如 (2-53) 式的物理量称为守恒量, 守恒量之间存在简单的定量关系。设有守恒量  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 输运系数相同时, 两者满足同一守恒方程。如果系统入口  $A$  和  $B$  处的边界值为  $\varphi_{1A}, \varphi_{1B}, \varphi_{2A}$  和  $\varphi_{2B}$ , 其它边界上梯度为零, 则有

$$f = \frac{\varphi_1 - \varphi_{1A}}{\varphi_{1B} - \varphi_{1A}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_{2A}}{\varphi_{2B} - \varphi_{2A}} \quad (2-54)$$

式中  $f$  称为混合分数。

如图2-10所示的理想燃烧器,入口1处流量为  $f \text{ kg/s}$  的气流与入口2处流量为  $(1-f) \text{ kg/s}$  的气流混合生成  $1 \text{ kg/s}$  的混合物。对于定常过程,任何守恒量  $A$  应满足

$$f = \frac{A - A_2}{A_1 - A_2}$$

因此,输运系数相同时,流场的守恒量可用混合分数  $f$  来表示。

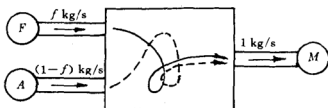


图2-10 燃烧器中的气流混合过程

## 二、概率密度分布函数(PDF)

根据上述讨论,混合分数  $f$  与流场守恒量  $A$  之间满足关系  $A = A(f)$ ,如果知道  $f$  的概率密度分布函数  $\mathcal{P}(f)$ ,则可求  $A$  的平均值

$$\bar{A} = \int_0^1 A(f) \mathcal{P}(f) df$$

理论分析表明<sup>[2]</sup>,随机过程的概率密度分布函数可以通过各阶统计矩来精确构造。但由于统计矩是一个无穷系列,故该过程是非常困难的。能否用有限的统计矩辅以某些假设来构造概率密度分布函数呢?下面将介绍几种由一阶原点矩(即平均值)  $\bar{f} = \int_0^1 f \mathcal{P}(f) df$  和二阶中心矩(即方差)  $g = \int_0^1 (f - \bar{f})^2 \mathcal{P}(f) df$  构成的概率密度分布函数。

### 1. 城垛分布<sup>[9]</sup>

城垛分布的概率密度分布函数为

$$\mathcal{P}(f) = (1 - \alpha) \delta(f - f_+) + \alpha \delta(f - f_-) \quad (2-55)$$

其中  $\alpha$  表示事件  $f = f_-$  出现的几率,  $\delta$  为脉冲函数,其定义式为

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

故

$$\int_0^f \mathcal{D}(f) df = \begin{cases} 0 & 0 < f < f_- \\ \alpha & f_- < f < f_+ \\ 1 & f_+ < f < 1 \end{cases}$$

该函数的一阶原点矩  $\bar{f} = \alpha f_- + (1 - \alpha) f_+$

二阶中心矩  $g = \overline{f^2} = (1 - \alpha)(f_+ - \bar{f})^2 + \alpha(f_- - \bar{f})^2$

函数图像如图2-11所示。

当  $f_- \geq 0, f_+ \leq 1$  时, 取  $\alpha = 0.5$

$$f_- = \bar{f} - \sqrt{g}$$

$$f_+ = \bar{f} + \sqrt{g}$$

当  $f_+ > 1$  时, 取  $f_+ = 1$

$$\alpha = \left( 1 + \frac{g}{(1 - \bar{f})^2} \right)^{-1}$$

$$f_- = \bar{f} - \frac{g}{1 - \bar{f}}$$

当  $f_- < 0$  时, 取  $f_- = 0$

$$\alpha = \left( 1 + \frac{\bar{f}^2}{g} \right)^{-1}$$

$$f_+ = \bar{f} + \frac{g}{\bar{f}}$$

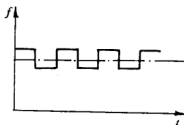


图2-11 城垛分布

## 2. 截尾正态分布

正态分布亦称为高斯分布是最为常见的概率分布, 因为无数随机过程的组合可构成正态分布<sup>[2]</sup>。正态分布函数具有如下形式

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(f - \bar{f})^2}{g}\right)$$

这是由一阶原点矩  $\bar{f}$  和二阶中心矩  $g$  组成的分布函数。

对于燃烧过程,混合函数的定义域为  $0 \leq f \leq 1$ , 故当  $f > 1$  或  $f < 0$  时, 应有  $\mathcal{D}(f) = 0$ 。但正态分布函数不满足这一要求, 为此 Lockwood 等<sup>[10]</sup>提出“截尾正态分布”的概念, 即舍去没有物理意义的部分。为保证  $\mathcal{D}(f)$  仍满足归一条件

$$\int_0^1 \mathcal{D}(f) df = 1$$

在  $f=0$  和  $f=1$  处采用  $\delta$  函数, 有

$$\mathcal{D}(f) = A\delta(f) + B\delta(f-1) + \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f-a}{c}\right)^2\right) (D(f) - D(f-1)) \quad (2-56)$$

其中  $a$  和  $c^2$  为相应正态分布函数的一阶原点矩和二阶中心矩。 $D(f)$  称为 Heaviside 函数, 有

$$D(f) = \begin{cases} 1 & \text{当 } f > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

因此 
$$D(f) - D(f-1) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 < f < 1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f \geq 1 \text{ 或 } f \leq 0 \end{cases}$$

常数  $A$  和  $B$  应保证  $\mathcal{D}(f)$  满足归一方程, 故

$$A = \int_{-\infty}^0 \mathcal{D}_0(f) df$$

$$B = \int_1^{\infty} \mathcal{D}_0(f) df$$

其中 
$$\mathcal{D}_0(f) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f-a}{c}\right)^2\right)$$

根据方程(2-56), 截尾正态分布的一阶原点矩和二阶中心矩分别为

$$\bar{f} = B + \int_0^1 \left\{ \frac{f}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f-a}{c}\right)^2\right) \right\} df$$

$$g = B + \int_0^1 \left\{ \frac{f^2}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f-a}{c}\right)^2\right) \right\} df - \bar{f}^2$$

上述两式可表示为  $a = a(\bar{f}, g)$

$$c = c(\bar{f}, g)$$

因此截尾正态分布是由  $\bar{f}$  和  $g$  构成的, 其函数图像如图2-12所示。

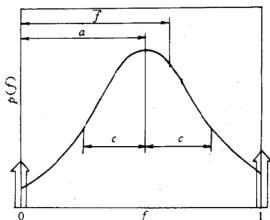


图2-12 截尾正态分布函数

### 三、 $k-\varepsilon-f-g$ 方程<sup>[9,11]</sup>

混合分数是守恒量, 满足恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (2-57)$$

其中  $S_c = \frac{\nu}{D}$  为 Schmidt 数。对该式分解

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho f'') + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{f} \bar{u}_j + \rho f'' \bar{u}_j + \rho \bar{f} u_j'' + \rho f'' u_j'') \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial f''}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2-58)$$

$$\text{取平均值 } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \bar{f}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j'' f''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \quad (2-59)$$

假设  $f'' = 0$ , 并采用梯度模拟, 即  $\overline{\rho u_j'' f''} = -\frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}$ , 其中  $\mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}$

$$\text{于是 } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \bar{f}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right\} \quad (2-60)$$

由  $\overline{f''((2-58)-(2-59))}$

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho f''^2 \right)} + f'' \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho f'' \bar{u}_j)} + f'' \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{f} u_j'')} + f'' \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho f'' u_j'')} \\ & - f'' \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho f'' u_j'')} = f'' \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial f''}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

忽略密度脉动, 有  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0$  和  $\frac{\partial u_j''}{\partial x_j} = 0$ , 故

$$\frac{\partial \bar{\rho} g}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} g \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{S_c} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j'' \bar{\rho} g) - \bar{\rho} f'' u_j'' \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} - \mu \left( \frac{\partial f''}{\partial x_j} \right)^2$$

相关量按如下方式模化

$$\begin{aligned} \overline{u_j'' \rho g} &= - \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial g}{\partial x_j} \\ \overline{\rho f'' u_j''} &= - \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \\ \overline{\mu \left( \frac{\partial f''}{\partial x_j} \right)^2} &= C_{s2} \frac{\varepsilon}{K} \bar{\rho} g \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial \bar{\rho} g}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j g)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) + C_{s1} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right)^2 - C_{s2} \bar{\rho} g \frac{\varepsilon}{K} \quad (2-61)$$

综上所述,  $k-\varepsilon-\bar{f}-g$  的封闭方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}) \\ & \bar{\rho} \frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \varepsilon \\ & \bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu_t}{\sigma_t} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left( \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) \\ & \quad - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{K} \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{f}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{f}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}g)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j g) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_i}{\sigma_i} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\} + C_{g1}\mu_i \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \right)^2 - C_{g2}\bar{\rho}g \frac{\varepsilon}{K}$$

$$\text{其中} \quad \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \left\{ \bar{\rho} K + \mu_i \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right\} - \mu_i \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right\}$$

$$\mu_i = C_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}$$

通常取  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_1 = 1.44$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $C_{g1} = 2.8$ ,  $C_{g2} = 2.0$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_t = 0.9$ ,  $\sigma_r = 1.30$ , 解得  $\tilde{f}$  和  $g$  后可构造适当的 PDF。

#### 四、扩散火焰与预混火焰<sup>[3]</sup>

对于扩散火焰, 设燃烧系统有两处供气, 1 表示燃料供气口, 2 表示氧化剂供气口, 于是,  $Y_{O,1} = 0$ ,  $Y_{F,2} = 0$ 。当反应不可逆且速率无限快时, 火焰阵面无限薄, 氧化剂与燃料在空间不共存。火焰阵面上  $Y_O = Y_F = 0$ 。根据方程(2-54)

$$f_{st} = \frac{Y_{O,2}}{\frac{Y_{F,1}}{\beta} + Y_{O,2}}$$

氧化剂富裕区域, 即  $f < f_{st}$  时,  $Y_F = 0$ ,  $Y_O \neq 0$

$$f = \frac{-Y_O + Y_{O,2}}{\frac{Y_{F,1}}{\beta} + Y_{O,2}}$$

燃料富裕区域, 即  $f > f_{st}$  时,  $Y_O = 0$ ,  $Y_F \neq 0$

$$f = \frac{Y_F + \beta Y_{O,2}}{Y_{F,1} + \beta Y_{O,2}}$$

或者写成  $f < f_{st}$  时

$$Y_F = 0$$

$$Y_O = Y_{O,2} \frac{f_{st} - f}{f_{st}} \quad (2-62)$$

$f > f_{st}$  时

$$Y_O = 0$$

$$Y_F = \beta Y_{O,2} \frac{f - f_{st}}{f_{st}} \quad (2-63)$$

因此, 组分浓度可用混合分数来表示。

如果化学反应是可逆反应, 速率无限快, 此时反应在每个瞬间皆处于平衡态, 组分浓度必须满足平衡方程。通过复杂的平衡计算



同样可以由  $f$  求得  $Y_i$ , 即同样有函数关系式  $Y_i = Y_i^0(f)$ 。但  $f = f_m$  的火焰阵面附近, 氧化剂和燃料是共存的。图2-13表示不可逆和可逆反应的流场参数与混合分数的关系曲线。由混合分数  $f$  的概率密度分布函数和  $f$  与流场某些参数的瞬时关系式可求得流场的平均值。

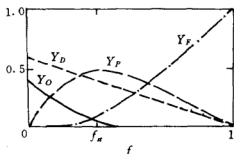


图2-13 流场参数与混合分数的关系曲线

预混火焰的燃料和氧化剂进入反应区前就已经均匀混合, 反应以有限速率进行, 此时, 燃料与氧化剂共存且不受化学平衡的制约。  $f$  与  $Y_F$ 、 $Y_O$  和  $T$  之间不复存在如(2-62)式和(2-63)式那样的简单关系, PDF 方法只能求守恒量的平均值, 无法求非守恒量的平均值, 如  $\bar{Y}_F$ 、 $\bar{T}$  等。Shvab—Zeldovich 变换消去原方程的源项, 但使方程失去了封闭性, 故必须将两个关于耦合变量的守恒方程与(2-50)~(2-52)式中任何一个联立才可求解。即必须对一个含源项的方程进行分解与模化, 一般取燃料组元守恒方程(2-50)。

按推导  $f$  和  $g$  方程的思路

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{Y}_F) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{Y}_F) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_t}{\sigma_i} \right) \frac{\partial \tilde{Y}_F}{\partial x_j} \right\} - \bar{\omega}_F \quad (2-64)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}g_Y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_jg_Y) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_t}{\sigma_i} \right) \frac{\partial g_Y}{\partial x_j} \right\} + C_{gY1}\mu_t \left( \frac{\partial \tilde{Y}_F}{\partial x_j} \right)^2 - C_{gY2}\bar{\rho}g_Y \frac{\varepsilon}{K} \quad (2-65)$$

其中化学反应速率可采用 Spalding 提出的旋涡破碎模型<sup>[9]</sup>

$$\bar{\omega}_F = C_{\varepsilon}\bar{\rho} \frac{\varepsilon}{K} \sqrt{g_Y} \quad (2-66)$$

求得  $\hat{Y}_F$  后, 根据耦合变量的定义可进一步求  $\hat{Y}_0$  和  $\hat{T}$  等。

### 2.3.3 旋涡破碎模型<sup>[3,12]</sup>

层流预混火焰的传播速度主要决定于混合物的化学和物理性质, 而湍流预混火焰则受到流动状态的强烈影响, 其传播速度高于层流火焰。Ballal<sup>[13]</sup> 对此作过系统讨论, 参见图2-14。当湍流强度较

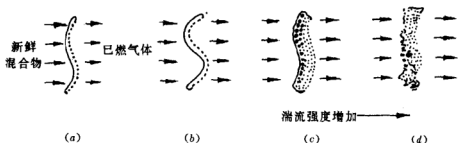


图2-14 湍流能量分布对火焰结构的影响

低, 旋涡尺度较大时, 湍流的能量使火焰产生褶皱, 从而增大燃烧表面(如图2-14a)。随湍流强度的增加和旋涡尺度的减小, 火焰阵面的褶皱程度也随之增大(如图2-14b)。湍流强度的进一步增加, 会使未燃混合物中的旋涡被火焰阵面所卷吸与吞食, 从而与已燃气体形成相互粘附的流块, 此时大部分能量被火焰中的旋涡所吸收, 小部分能量使火焰褶皱(如图2-14c)。相干流块在湍流燃烧中起着重要的作用, 火焰在其中的传播使流块受到拉伸或挤压。

Spalding 假设燃烧速率由湍流混合所决定, 平均反应速率决定于拉伸导致的旋涡尺寸的减小速率, 有<sup>[12]</sup>

$$\omega_F = C_{EBU} \frac{\varepsilon}{K} \sqrt{g_{VF}}$$

旋涡破碎模型的基本思想来自对相干流块的分析。由未燃气体与已燃气体粘附而成的相干流块作为一个整体经历了生成, 发展(如流块内部反应阵面的传播, 流块因拉伸而变薄等等)和消亡(被再吞食或流出所研究的流块)。设其厚度为  $\lambda$ , 变化率方程为

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -R^* \lambda \quad (2-67)$$

即流块愈厚愈易变形。 $R^*$ 称为当地拉伸率。为了方便,假设  $R^* =$  常数,积分上式

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp(-R^* t) \quad (2-68)$$

其中  $\lambda_0$  为  $t=0$  时相干流块的厚度。

相干流块内,未燃气体与已燃气体的界面为火焰阵面,若将瞬态火焰视作层流火焰,相对于未燃气体的传播速度应为层流燃烧速度  $S_L$ ,于是燃料消耗率方程为

$$\frac{DY_F}{Dt} = -\frac{S_L}{\lambda} (Y_{F,u} - Y_{F,b})$$

脚标  $u$  和  $b$  分别表示燃烧前和燃烧后。

引进反应度  $\xi = \frac{Y_{F,u} - Y_F}{Y_{F,u} - Y_{F,b}}, 0 \leq \xi \leq 1$ , 由上式

$$\dot{\xi} = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{S_L}{\lambda_0} \exp(R^* t) \quad (2-69)$$

当  $S_L =$  常数时

$$\xi = \frac{S_L}{R^* \lambda_0} (\exp(R^* t) - 1)$$

代入(2-69)式得  $\dot{\xi} = R^* \xi + \frac{S_L}{\lambda_0}$

令  $a = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \exp(R^* t) - 1$ , 称为流块的年龄函数。当  $a = a_1 = \frac{R^* \lambda_0}{S_L}$  时, 有  $\xi = 1$ , 即相干流块已经消失, 故称  $a_1$  为流块的寿命。

当  $a \leq a_1$  时

$$\xi = \frac{a}{a_1}$$

$$\dot{\xi} = \frac{S_L}{\lambda_0} (1 + a) \quad (2-70)$$

当  $a > a_1$  时

$$\xi = 1$$

$$\dot{\xi} = 0$$

$$(2-71)$$

火焰内的任一位置, 各种年龄的流块都可能存在, 流块年龄在

空间某点的分布可用概率密度分布函数  $\mathcal{P}(a)$  来表示。设

$$\mathcal{P}(a) = \begin{cases} 0 & a < b \\ \frac{1}{c-b} & b \leq a < c \\ 0 & c \leq a \end{cases} \quad (2-72)$$

其中  $\frac{b}{c}$  = 常数, 如图2-15所示。由此可得到反应度与反应速率的平均值

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} \xi \mathcal{P}(a) da$$

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} \xi \mathcal{P}(a) da$$

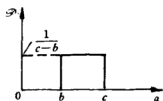


图2-15 流块年龄的概率密度分布函数

将(2-70)式、(2-71)式和(2-72)式代入上式

$$a_1 < b \text{ 时} \quad \bar{\xi} = 1$$

$$\bar{\xi} = 0$$

$$b \leq a_1 < c \text{ 时} \quad \bar{\xi} = 1 - \frac{(a_1 - b) \left( 1 - \frac{b}{a_1} \right)}{2(c - b)}$$

$$\bar{\xi} = \frac{R^* (a_1 - b)}{c - b} \left[ \frac{1 - \frac{b}{a_1}}{2} + \frac{1}{a_1} \right]$$

$$c \leq a_1 \text{ 时} \quad \bar{\xi} = \frac{b + c}{2a_1}$$

$$\frac{\bar{\xi}}{R^*} = \frac{b + c}{2a_1} + \frac{1}{a_1}$$

$\bar{\xi}$  还可以用  $\xi^*$  表示

$$\bar{\xi} \leq \xi^* \text{ 时} \quad \bar{\xi} = R^* \bar{\xi} + \frac{S_L}{\lambda_0} \quad (2-73)$$

$$\xi^* \leq \bar{\xi} < 1 \text{ 时} \quad \bar{\xi} = R^* \bar{\xi} \frac{1 - \bar{\xi}}{1 - \xi^*} \quad (2-74)$$

其中  $\xi^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b}{c} \right)$ ,  $b/c$  的量级约为0.5。一般燃料空气混合物

$\frac{S_L}{R^* \lambda_0}$  的量级约为 0.1, 故可略去方程 (2-73) 中  $S_L/\lambda_0$  项。这说明湍流预混燃烧主要是流体力学问题, 化学动力学过程对燃烧速率的影响很小。

方程 (2-73) 和方程 (2-74) 还可写成

$$\text{当 } \frac{\bar{Y}_{F,u} - \bar{Y}_F}{\bar{Y}_{F,u} - \bar{Y}_{F,b}} \leq \xi^* \text{ 时, } \quad \frac{D\bar{Y}_F}{Dt} = (\bar{Y}_{F,u} - \bar{Y}_{F,b}) R^* + \frac{S_L}{\lambda_0} \quad (2-75)$$

$$\text{当 } \xi^* < \frac{\bar{Y}_{F,u} - \bar{Y}_F}{\bar{Y}_{F,u} - \bar{Y}_{F,b}} < 1 \text{ 时, } \quad \frac{D\bar{Y}_F}{Dt} = \frac{\xi^*}{1 - \xi^*} (\bar{Y}_F - \bar{Y}_{F,b}) R^* \quad (2-76)$$

此为时均反应速率与组分质量分数平均值之间的关系式, 可用来封闭  $Re$  数分解后的带化学反应的守恒方程。

### 2.3.4 统计模型

湍流预混火焰有两种模型, 即皱褶层流火焰模型和分布反应区模型, 前者假定瞬时反应仅出现在狭窄的火焰阵面内, 而后者则认为存在于整个流场。因此, 两种模型描述了两种极端状态。实际上由于流场各处的条件不同, 两种模型都可能存在。Bray<sup>[14,15]</sup> 试图建立一种统一模型, 以反映两种模型的联系和各自的适用范围, 该模型称为统计模型。

如果视系统内仅有反应物和产物两种组分, 前者的质量分数为  $1-C$ , 后者为  $C$ , 有  $0 \leq C \leq 1$ 。设其概率密度分布函数为

$$\mathcal{P}(C, x) = \alpha(x)\delta(C) + \beta(x)\delta(C-1) + (D(C) - D(C-1))\gamma(x)f(C, x) \quad (2-77)$$

其中  $\delta$  和  $D$  分别为  $\delta$  函数和 Heaviside 函数,  $C=0$  和  $C=1$  分别表示完全未燃和完全燃烧状态,  $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$  和  $\gamma(x)$  分别表示在  $x$  处未燃、已燃和正在燃烧三种状态的出现概率

$$\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) = 1 \quad (2-78)$$

$f(C, x)$  是  $C$  的连续函数, 表示正在燃烧的混合物内产物浓度的概率分布

$$\int_0^1 f(C, x) dC = 1$$

因此,空间  $x$  处质量分数  $C$  的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{C}(x) &= \int_0^1 C \mathcal{P}(C, x) dC = \beta(x) + \gamma(x) \int_0^1 C f(C) dC \\ &= \beta(x) + \gamma(x) I_1(x)\end{aligned}\quad (2-79)$$

其中 
$$I_1(x) = \int_0^1 C f(C, x) dC$$

同样 
$$\overline{C'^2(x)} = \bar{C}(x)(1 - \bar{C}(x)) - \gamma(x)(I_1(x) - I_2(x)) \quad (2-80)$$

其中 
$$I_2(x) = \int_0^1 C^2 f(C, x) dC$$

马赫数很小时,压力的空间变化与粘性耗散项皆可忽略,故

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{C} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)$$

如果取混合物的定压比热  $C_p$  为常数,则有  $h = C_p T - C \Delta H$ ,  $\Delta H$  为生成单位质量的产物释放的热。

对于绝热流动,忽略流场内部的热传导,并设远离燃烧区的上游参数分布均匀且不随时间变化,方程有解

$$h = C_p T - C \Delta H = h_0 \quad (2-81)$$

进而

$$C_p \bar{T} - \bar{C} \Delta H = h_0 \quad (2-82)$$

$$T' = \left( \frac{\Delta H}{C_p} \right) C' \quad (2-83)$$

由(2-80)式得

$$\overline{T'^2} = \left( \frac{\Delta H}{C_p} \right)^2 \{ \bar{C}(1 - \bar{C}) - \gamma(I_1 - I_2) \} \quad (2-84)$$

当反应物和产物为完全气体时,混合物的状态方程

$$p = R \rho T \left( \frac{1 - C}{W_1} + \frac{C}{W_2} \right) \quad (2-85)$$

其中  $W_1, W_2$  分别为反应物和产物的有效分子量。

忽略压力脉动

$$\bar{p} = R(\bar{\rho} + \rho')(\bar{T} + T') \left( \frac{1 - \bar{C} - C'}{W_1} + \frac{\bar{C} + C'}{W_2} \right) \quad (2-86)$$

取平均值

$$\bar{p} = R(\bar{\rho T} - \bar{\rho' T'}) \left( \frac{1 - \bar{C}}{W_1} + \frac{\bar{C}}{W_2} \right) + R \left( \frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_1} \right) (\bar{\rho} \bar{C'} T'} + \bar{T} \bar{\rho' C'} + \bar{\rho' T' C'}) \quad (2-87)$$

由(2-86)式减(2-87)式,忽略非线性的脉动项,并用(2-83)式消去  $T'$  得

$$\rho' = -\bar{\rho} \psi C' \quad (2-88)$$

$$\text{其中} \quad \psi = \frac{\Delta H}{C_p \bar{T}} + \left( \frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_1} \right) \left/ \left( \frac{1 - \bar{C}}{W_1} + \frac{\bar{C}}{W_2} \right) \right. \quad (2-89)$$

将(2-88)式代入(2-87)式,忽略  $\bar{\rho' T' C'}$  得

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \left\{ \frac{1 - \bar{C}}{W_1} + \frac{\bar{C}}{W_2} \right\} \left\{ 1 - \bar{C'}^2 \left( \frac{\Delta H}{C_p \bar{T}} \right)^2 + \psi \left( \psi - \frac{\Delta H}{C_p \bar{T}} \right) \right\} \quad (2-90)$$

由状态方程(2-80)和方程(2-85)有  $T = T(C)$  和  $\rho = \rho(C)$ , 故化学反应为一步不可逆反应时,反应速率公式为

$$\omega = \omega(T, \rho, C) = \omega(C)$$

$$\text{从而有} \quad \bar{\omega} = \int_0^1 \omega(C) \mathcal{P}(C) dC$$

由于  $\omega(0) = 0, \omega(1) = 0$ , 故

$$\bar{\omega} = \gamma \int_0^1 \omega(C) f(C) dC = \omega_{\max} \gamma I_3 \quad (2-91)$$

$$\text{其中} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{\omega(C)}{\omega_{\max}} f(C) dC$$

$\omega_{\max}$  为最大反应速率。同样有

$$\overline{\omega' C'} = \omega_{\max} \gamma (I_4 - I_3) \quad (2-92)$$

$$\text{其中} \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\omega(C)}{\omega_{\max}} C f(C) dC$$

方程(2-78)是描述湍流预混火焰的一种通式,既适用于皱褶层流火焰模型,又适用于分布反应区模型。湍流对火焰的影响与两个特性参数有关:湍流特征尺度  $l_m$  和湍流强度  $u'_{rms}$ , 因此方程(2-78)的表达形式也应与  $l_m$  和  $u'_{rms}$  有关。

当层流火焰的厚度比湍流尺度  $l_m$  小时,即  $L_L/l_m \ll 1$ , 其中  $L_L$

为初始温度为  $T_0$  时层流火焰的厚度。如果湍流强度不是很大, 燃烧模型多为皱褶层流火焰模型。尽管火焰阵面发生皱褶和扭曲, 甚至因破碎而形成相干流块, 但未燃烧部分与已燃烧部分总被反应面分开, 这与层流火焰类似。

当  $\frac{L_L}{l_m} \gg 1$  时, 即厚反应区中的高强度湍流, 或  $\frac{L_L}{l_m} \ll 1, \frac{S_L}{u'_{rms}} \ll 1$  时, 即薄反应区中高强度湍流, 燃烧模型多为分布反应区模型。



## 第三章 两相湍流燃烧

由于相间界面的存在和相间输运,即使各相均采用连续介质模型,多相流动也是无法求解的。体积平均法解决了多相介质共存模型的数学描述,辅之若干与相间输运有关的公式,便可得到参数在空间连续分布的多相流守恒方程。两相湍流燃烧涉及到湍流,化学反应和相间输运的相互作用。由于对基于体积平均值的守恒方程的 Reynolds 分解,故其模式理论较均相问题复杂得多。如果将其处理为均相系统,则基本是第二章讨论的问题。对于颗粒悬浮流,若将颗粒相守恒方程写成 Lagrange 坐标形式,从而以单个颗粒代表某颗粒群,这便是颗粒轨道模型。它们都可使问题简化。

本章内容包括:基于体积平均值的两相流守恒方程;一种特殊的两相流,即颗粒悬浮流,介绍颗粒存在对体系热力学特性的影响,颗粒与气相的相互作用及悬浮流守恒方程;两相湍流燃烧模型,包括均相模型和非均相分离流模型。

### 3.1 两相流守恒方程

#### 3.1.1 体积平均值及其守恒方程

##### 一、体积平均值

多相体系中,每相均占有一定的空间,互不相容,所占空间内,满足均相守恒方程<sup>[1]</sup>

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_i u_{ij}) = 0 \quad (3-1)$$

$$\rho_k \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} + \rho_k u_{kj} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_{k,ij}}{\partial x_j} + \rho_k f_{ki} \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k C_{rk} T_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_{kj} C_{rk} T_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_k \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \right) + \pi_{k,ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + J_{EK} \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k Y_{kl}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_{kj} Y_{kl}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho_k \frac{\partial Y_{kl}}{\partial x_j} \right) - \omega_{kl} \quad (3-4)$$

其中脚标  $k$  表示第  $k$  相。若该相含有多种组元,  $Y_{kl}$  表示其中  $l$  组元的质量分数,  $f$  表示场力,  $J_{EK}$  表示能量方程中的源项, 如化学反应热等,  $C_{rk}$  为  $k$  相的定容比热,  $\omega_{kl}$  为  $k$  相  $l$  组分的化学反应速率。

动量守恒方程(3-2)和能量守恒方程(3-3)可写成矢量形式

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = \nabla \cdot \pi_k + \rho_k \mathbf{f}_k \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k E_k) = & - \nabla \cdot (\mathbf{u}_k p_k) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \\ & + \rho_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k - \nabla \cdot J_{qk} + J_{EK} \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中  $E_k = C_{rk} T_k + \frac{\mathbf{u}_k^2}{2}$  为总能量,  $J_{qk} = -k_k \nabla T_k$  为热流矢量。

各相界面上存在相间的相互作用, 即相间输运, 将描述这种作用的关系式作为边界条件便可使诸方程封闭。但这种方程数目巨大的多边界问题根本无法求解。为了简化, 引进多相连续介质共存模型, 即假设构成多相体系的相相互渗透占据同一空间<sup>[2]</sup>。

图 3-1 所示为由  $k$  和  $f$  构成的两相系统,  $L$  表示宏观流动的特征长度,  $d$  表示各相的特征长度(如悬浮颗粒的直径、多孔介质的孔径等), 当空间距离小于  $d$  时, 介质可能从一相过渡到另一相, 其状态因此发生突变, 故流场某参数  $A$  的空间分布是不连续的。在空间某点  $P$  取特征尺寸为  $l$  的控制体, 其大小满足  $d \ll l \ll L$ , 参数  $A$  在该控制体内的体积平均值<sup>[3]</sup>

$$\langle A_k \rangle = \frac{1}{V} \int_V A_k dV$$

其中  $V = V_k(t) + V_f(t)$  为控制体体积, 脚标  $k$  和  $f$  表示  $k$  相和  $f$  相。

其固有体积平均值

$$\langle A_k \rangle^k = \frac{1}{V_k(t)} \int_{V_k(t)} A_k dV \quad (3-7)$$

记  $\varepsilon_k = \frac{V_k(t)}{V}$  称为  $k$  相的体积分数

$$\varepsilon_k \langle A_k \rangle^k = \langle A_k \rangle \quad (3-8)$$

$P$  点可在  $k$  相也可在  $f$  相,但同时具有两相的体积平均值,故从平均意义上讲两相在其中是共存的,平均值在空间是连续分布的。因此,称此为多相连续介质共存模型。

## 二、守恒方程

注意到如下几个公式<sup>[4]</sup>:

(1) Gaussian 原理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3-9)$$

(2) 运输原理

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{A} dV = \iiint_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dV + \iint_S \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

或

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A_k}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle A_k \rangle \\ &- \frac{1}{V} \iint_{S_i} A_k \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i ds \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中  $\mathbf{u}_i$  为界面的运动速度,  $\mathbf{n}_i$  为  $k$  相界面的外法线矢量。

(3) 平均原理

$$\nabla \iiint_V \mathbf{A} dv = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_S \mathbf{A} \mathbf{n} ds$$

或

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}_k \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{A}_k \rangle + \frac{1}{V} \iint_{S_i} \mathbf{A}_k \mathbf{n}_i ds \quad (3-11)$$

对于矢量  $\mathbf{A}_k$

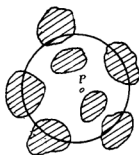


图 3-1 两相流中的控制体

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}_i \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{A}_i \rangle + \frac{1}{V} \iint_{S_i} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i ds$$

于是体积平均值的守恒方程为

$$\frac{\partial \langle \rho_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \mathbf{u}_i \rangle = - \frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds = \Gamma_i \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle \rho_i \mathbf{u}_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \rangle \\ &= - \nabla \langle p_i \rangle + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_i \rangle + \langle p_i \rangle f_i \\ &= + \frac{1}{V} \iint_{S_i} (-p_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i) ds \\ &= - \frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_i \mathbf{u}_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle \rho_i E_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \mathbf{u}_i E_i \rangle \\ &= - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_i p_i \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i \rangle \\ &+ \langle \rho_i \mathbf{u}_i \rangle \cdot f_i - \nabla \cdot \langle J_{qt} \rangle \\ &+ \langle J_{sK} \rangle - \frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_i E_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds \\ &- \frac{1}{V} \iint_{S_i} (p_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i - \mathbf{u}_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i) ds \\ &- \frac{1}{V} \iint_{S_i} J_{qt} \cdot \mathbf{n}_i ds \end{aligned} \quad (3-14)$$

若脚标  $m$  表示多相混合物

$$\langle \rho_m \rangle = \sum \langle \rho_i \rangle \quad (3-15)$$

$$\langle \rho_m u_m \rangle = \sum \langle \rho_i u_i \rangle \quad (3-16)$$

$$\langle \rho_m E_m \rangle = \sum \langle \rho_i E_i \rangle \quad (3-17)$$

$$\langle p_m \rangle = \sum \langle p_i \rangle = p$$

$$\langle \tau_m \rangle = \sum \langle \tau_k \rangle$$

由式(3-15)和式(3-16)得

$$\langle \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m \rangle = \sum (\langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle - \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle)$$

由式(3-15)和式(3-17)

$$\langle \rho_m \mathbf{u}_m E_m \rangle = \sum (\langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle - \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k)(E_k - E_m) \rangle)$$

根据总能量  $E$  的定义

$$\begin{aligned} \langle \rho_m C_{vm} T_m \rangle &= \sum (\langle \rho_k C_{vk} T_k \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \rho_k (u_k - u_m) \cdot (u_k - u_m) \rangle) \end{aligned}$$

其中  $T_m$  为混合物的滞止温度。

同样

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_m p_m \rangle &= \sum (\langle \mathbf{u}_k p_k \rangle - \langle (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_k) p_k \rangle) \\ \langle \mathbf{u}_k \cdot \tau_m \rangle &= \sum (\langle \mathbf{u}_k \cdot \tau_k \rangle - \langle (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_k) \cdot \tau_k \rangle) \end{aligned}$$

根据质量守恒定律  $\sum \iint_{S_k} \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k ds = 0$

即  $\sum \Gamma_k = 0$

故  $\frac{\partial \langle \rho_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \rangle = 0 \quad (3-18)$

同样混合物的动量方程和能量方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \langle \rho_m \mathbf{u}_m \rangle}{\partial t} + \frac{1}{V} \sum \iint_{S_k} \rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k ds \\ &+ \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m \rangle + \nabla \langle p \rangle - \nabla \cdot \langle \tau_m \rangle \\ &- \frac{1}{V} \sum \iint_{S_k} (-p_k \mathbf{n}_k + \tau_k \cdot \mathbf{n}_k) ds - \langle \rho_m \rangle f \\ &+ \nabla \cdot \sum \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle = 0 \quad (3-19) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \langle \rho_m E_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m E_m \mathbf{u}_m \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla \cdot \sum \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (E_k - E_m) \rangle \\
= & - \nabla \cdot \sum_k \langle \mathbf{u}_k p_k \rangle + \nabla \cdot \sum_k \langle \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \rangle \\
& + f \cdot \sum_k \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle - \nabla \cdot \langle J_{qm} \rangle + \langle J_E \rangle \\
& - \frac{1}{V} \sum_k \iint_{S_k} \rho_k E_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{n}_k dS \\
& - \frac{1}{V} \sum_k \iint_{S_k} \rho_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k dS + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k dS \\
& + \frac{1}{V} \sum_k \iint_{S_k} J_{qk} \cdot \mathbf{n}_k dS \tag{3-20}
\end{aligned}$$

### 3.1.2 相间输运

#### 一、输运方程

体积平均值的守恒方程,无论是各相的还是混合物的,都是一种微分积分方程,直接求解比较麻烦,常将其简化为微分方程。

方程中的积分项与两相间的输运有关,决定于多相体系的构成。多相体系最简单的构成形式为分层流和弥散流,前者各相几乎不混合,后者混合程度极高。

图 3-2 为分层流示意图,两相间具有明显的界面,故  $\mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_f$ 。根据界面两侧的守恒方程

$$\rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_k + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_f = 0$$

故

$$\begin{aligned}
u_{in} &= \frac{\rho_k u_{kn} - \rho_f u_{fn}}{\rho_k - \rho_f} \\
u_{it} &= \frac{\rho_k u_{kt} - \rho_f u_{ft}}{\rho_k + \rho_f}
\end{aligned}$$

其中脚标  $n$  和  $t$  分别表示界面法向和切向。

图 3-3 为弥散流示意图,两相高度混合,类似于均相体系中的

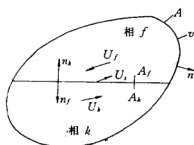


图 3-2 分层流

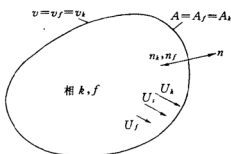


图 3-3 弥散流

不同组分, 有  $V = V_f = V_f$ ,  $n_k = n_f = -n$ 。此时, 混合物的运动速度就是边界的运动速度, 即

$$u_s = \frac{\rho_k u_k + \rho_f u_f}{\rho_k + \rho_f} = u_m$$

体积平均值的守恒方程中含 6 个积分项:

$$(1) \Gamma_k = -\frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k (u_k - u_s) \cdot n_k ds \text{ 表示单位体积 } k \text{ 相组分的}$$

成率。

$$(2) -\frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k u_k (u_k - u_s) \cdot n_k ds = -\frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k (u_k - u_s) (u_k - u_s) \cdot n_k ds - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k u_k (u_k - u_s) \cdot n_k ds$$

对于弥散流,  $u_s = u_m$ ,  $n = -n_k$ ,  $S_k$  为封闭曲面, 根据 Gaussian 原理

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k (u_s - u_k) (u_k - u_s) \cdot n_k ds \\ &= \frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k (u_k - u_m) (u_k - u_m) \cdot n ds \\ &= \nabla \cdot \langle \rho_k (u_k - u_m) (u_k - u_m) \rangle \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k u_k (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k ds \\
& = - \frac{\mathbf{u}_m}{V} \iint_{S_k} \rho_k (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k ds = \mathbf{u}_m \Gamma_k
\end{aligned}$$

对于分层流  $I_k = 0$

$$- \frac{1}{V} \iint_{S_k} \rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k ds = \Gamma_k \mathbf{u}_{ks}$$

其中  $u_{ks}$  为  $k$  相边界上的平均速度。

一般两相流系统

$$I_k = C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle$$

其中  $0 \leq C_k \leq 1$ , 称为弥散因子。

$$(3) \quad \frac{1}{V} \iint_{S_k} (-p_k \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k) ds = - \frac{1}{V} \iint_{S_k} p_k \mathbf{n}_k ds + \frac{1}{V} \iint_{S_k} \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k ds$$

根据(3-7)式

$$\varepsilon_k = \frac{V_k}{V} = \frac{1}{V} \iiint dv = \langle 1 \rangle$$

代入(3-10)式和(3-11)式得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} &= \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k ds \\
\nabla \varepsilon_k &= - \frac{1}{V} \iint_{S_k} \mathbf{n}_k dA
\end{aligned}$$

对于分层流 
$$- \frac{1}{V} \iint_{S_k} p_k \mathbf{n}_k ds = p_{ks} \nabla \varepsilon_k$$

它表示边界附近的体积分数梯度在压力作用下导致的动量输运, 其中  $p_{ks}$  为  $k$  相边界上的平均压力。

对于弥散流

$$\nabla \varepsilon_k = 0$$

故

$$- \frac{1}{V} \iint_{S_k} p_k \mathbf{n}_k ds = 0$$



## 一般两相流系统

$$-\frac{1}{V} \iint_{S_i} p_i \mathbf{n}_i ds = B_k p_{ks} \nabla \cdot \mathbf{e}_k$$

其中  $0 \leq B_k \leq 1$ 。

积分中另一项  $V_{ks} = \frac{1}{V} \iint_{S_i} \tau_i \mathbf{n}_i ds$  表示相间界面的粘性导致的  $k$

相动量的变化, 根据动量守恒方程  $\sum V_{ks} = 0$ 。

$$(4) -\frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_k E_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds = -\frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_k (E_k - E_s) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds - \frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_k E_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds$$

类似于积分(2), 对于弥散流

$$\begin{aligned} L_k &= -\frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{n}_i ds \\ &= \nabla \cdot \langle \rho_k (E_s - E_k) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_m^2) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle \\ &\quad + \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (e_k - e_s) \rangle \end{aligned}$$

其中  $e_k = C_{vk} T_k$  为比内能。

## 一般两相流系统

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{2} C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_m^2) \rangle \\ &\quad + C_{sk} \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (e_k - e_s) \rangle \end{aligned}$$

当  $C_k = 0, C_{sk} = 0$  时为分层流。积分中另一项  $\Gamma_k E'_{sk} =$

$-\frac{1}{V} \iint_{S_i} \rho_k E_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i ds$ , 表示相变时的能量变化, 其中  $E'_{sk}$  为

相变潜热。

$$(5) -\frac{1}{V} \iint_{S_i} (p_i \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_i - \mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i) ds$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{V} \iint_{S_i} p_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i dS + \frac{1}{V} \iint_{S_i} (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_i dS \\
&\quad + \frac{1}{V} \iint_{S_i} (-p_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_i dS
\end{aligned}$$

类似于积分 2) 和积分 3), 有如下各式

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{V} \iint_{S_i} p_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_i dS = B_k \nabla \cdot \langle p_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle \\
&\frac{1}{V} \iint_{S_i} (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k) \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_i dS = -B_k \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle \\
&\frac{1}{V} \iint_{S_i} (-p_k \mathbf{u}_s + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_i dS = B_k p_{ks} \mathbf{u}_k \cdot \nabla \varepsilon_k + V_k \cdot \mathbf{u}_{ks}
\end{aligned}$$

$B_k=0$  时为弥散流,  $B_k=1$  时为分层流。

$$(6) -\frac{1}{V} \iint_{S_i} \mathbf{J}_{qt} \cdot \mathbf{n}_i dS = Q_{is}, \text{ 表示两相界面的热传导。}$$

将上述积分表达式代入守恒方程式 (3-12)、式 (3-13) 和式 (3-14) 可得

$$\text{质量守恒方程} \quad \frac{\partial \langle p_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle = \Gamma_k \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned}
\text{动量守恒方程} \quad &\frac{\partial \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle = -\nabla p_k \\
&+ B_k p_{ks} \nabla \varepsilon_k + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle + \langle \rho_k \rangle f + \Gamma_k \mathbf{u}_m \\
&+ C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle + V_k
\end{aligned}$$

若令  $p_{ks} = p$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_f \rangle \\
&= -\varepsilon_k \nabla p - (1 - B_k) p \nabla \varepsilon_k \\
&\quad + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle + \langle \rho_k \rangle f + \Gamma_k \langle \mathbf{u}_m \rangle \\
&\quad + C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle + V_k \quad (3-21)
\end{aligned}$$

对于分层流,  $B_k=1, C_k=0$

$$\frac{\partial \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle = -\varepsilon_k \nabla p + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle$$

$$+ \langle \rho_k \rangle f + \Gamma_k \mathbf{u}_k + \Gamma_k \quad (3-22)$$

对于弥散流,  $B_k=0, C_k=1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \rangle = & -\varepsilon_k \nabla p - p \nabla \varepsilon_k + \nabla \cdot \langle \tau_k \rangle \\ & + \langle \rho_k \rangle f + \Gamma_k \mathbf{u}_m + \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle + V_k \end{aligned} \quad (3-23)$$

能量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_k E_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k E_k \mathbf{u}_k \rangle \\ = & -\varepsilon_k \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m p \rangle - B_k \varepsilon_k \nabla \cdot \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) p \rangle \\ & - (1 - B_k) p \mathbf{u}_m \cdot \nabla \varepsilon_k + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m \tau_k \rangle \\ & + B_k \nabla \cdot \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \cdot \tau_k \rangle + f \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle \\ & - \nabla \cdot \langle \mathbf{J}_{qk} \rangle + \langle \mathbf{J}_{Ek} \rangle + Q_{ks} + V_k \cdot \mathbf{u}_{ks} \\ & + \Gamma_k E'_{ks} + \frac{1}{2} C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_m^2) \rangle \\ & + C_{sk} \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(e_k - e_s) \rangle \end{aligned} \quad (3-24)$$

如果用总焓

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_k H_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k H_k \rangle = & \varepsilon_k \frac{\partial p}{\partial t} - B_k \nabla \cdot \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) p \varepsilon_k \rangle \\ & + (1 - B_k) p \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m \cdot \tau_k \rangle + B_k \nabla \cdot \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \cdot \tau_k \rangle \\ & + f \cdot \langle \rho_k \mathbf{u}_k \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{J}_{qk} \rangle + \langle \mathbf{J}_{Ek} \rangle + Q_{ks} \\ & + V_k \cdot \mathbf{u}_{ks} + \Gamma_k H'_{ks} + \frac{1}{2} C_k \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_m^2) \rangle \\ & + C_{sk} \nabla \cdot \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(h_k - h_s) \rangle \end{aligned} \quad (3-25)$$

$B_k=1, C_k=0, C_{sk}=0$  时为分层流,  $B_k=0, C_k=0, C_{sk}=1, C_{kk}=1$  时为弥散流。

此外, 分层流混合物的动量与能量守恒方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_m \mathbf{u}_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m \rangle = & \nabla \cdot \langle \tau_m \rangle + \langle \rho_m \rangle f \\ & - \nabla \cdot \sum_k \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \rangle \quad (3-26) \\ \frac{\partial \langle \rho_m E_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m E_m \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla \cdot \sum_i \langle \rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_m) (E_i - E'_{ik}) \rangle \\
& = - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_k p \rangle - \nabla \cdot \sum_k \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) p_k \rangle \\
& \quad + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m \cdot \boldsymbol{\tau}_m \rangle + \nabla \cdot \sum_k \langle (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m) \cdot \boldsymbol{\tau}_k \rangle \\
& \quad + f \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{J}_{qm} \rangle + \langle J_k \rangle \quad (3-27)
\end{aligned}$$

对于弥散流

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \rho_m u_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m \rangle \\
& = - \nabla p + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_m \rangle + \langle \rho_m \rangle f \quad (3-28) \\
& \frac{\partial \langle \rho_m E_m \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m E_m \rangle = - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m p \rangle \\
& \quad + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_m \cdot \boldsymbol{\tau}_m \rangle + f \cdot \langle \rho_m \mathbf{u}_m \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{J}_{qm} \rangle + \langle J_k \rangle \quad (3-29)
\end{aligned}$$

## 二、输运系数

方便起见,忽略体积平均值符号 $\langle \quad \rangle$ 。由方程(3-21)

$$\begin{aligned}
\rho_k \frac{du_{ki}}{dt_k} & = \frac{\partial}{\partial x_j} \pi_{kij} + B_i p \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} + \rho_k f_{ki} - (u_{ki} - u_{mi}) \Gamma_k \\
& \quad + C_k \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k (u_{ki} - u_{mi}) (u_{ij} - u_{mj})) + \Gamma_{ki} \quad (3-30)
\end{aligned}$$

其中 
$$\frac{d}{dt_k} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

对于牛顿流体

$$\pi_{kij} = - p \varepsilon_k \delta_{ij} + \mu_k A_{kij} + \mu_{k2} \theta_k \delta_{ij} \quad (3-31)$$

其中 
$$A_{kij} = \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i}, \theta_k = \frac{1}{2} (A_{knn}) = \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_i}$$

同样

$$\begin{aligned}
A_{mij} & = \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{mj}}{\partial x_i} \\
& = \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \sum \rho_k u_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sum \rho_k u_{kj}}{\partial x_i} - u_{mj} \frac{\partial \rho_m}{\partial x_i} - u_{mi} \frac{\partial \rho_m}{\partial x_j} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\rho_m} \sum_k \left( \rho_k \Lambda_{mij} + \frac{\partial J_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial J_{kj}}{\partial x_i} \right) \quad (3-32)$$

其中

$$J_k = \rho_k$$

由于

$$\mu_m \Lambda_{mij} = \sum \mu_k \Lambda_{ki}$$

故

$$\mu_k \Lambda_{kij} = \mu_m \frac{\rho_k}{\rho_m} \Lambda_{mij} + \frac{\mu_m}{\rho_m} \left( \frac{\partial J_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial J_{ji}}{\partial x_i} \right) \quad (3-33)$$

同样可得

$$\mu_{k2} \theta_k = \mu_{m2} \frac{\rho_k}{\rho_m} \theta_m + \frac{\mu_{m2}}{\rho_m} \frac{\partial J_{ki}}{\partial x_i} \quad (3-34)$$

式(3-33)和式(3-34)代入式(3-30),方程中仅含  $\mu_m$  和  $\mu_{m2}$ 。类似的讨论可得

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{dE_k}{dt_k} = & \frac{\partial}{\partial x_j} u_{ij} (-p \varepsilon_k \delta_{ij} + \mu_k \Lambda_{kij} + \mu_{k2} \theta_k \delta_{ij}) \\ & + B_k p u_{ki} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} - \Gamma E_{sk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_k \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \right) + J_{sK} \\ & + \frac{C_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_k (u_{ij} - u_{mj}) (u_i^2 - u_m^2) + Q_k + \rho_k u_{ij} f_{kj} \end{aligned} \quad (3-35)$$

其中

$$\begin{aligned} k_k \frac{\partial T_k}{\partial x_j} = & k_k \rho_n \frac{\rho_k C_{rk}}{C_{rn}} \frac{\partial T_k}{\partial x_j} + k_m T_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho_k C_{rk}}{\rho_n C_{rn}} \right) + k_m \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho_k u_{ij} (u_{ki} - u_{mi})}{\rho_n C_{rn}} \right) \\ = & k_m \left\{ \frac{\rho_k C_{rk}}{\rho_m C_{rm}} \frac{\partial T_k}{\partial x_j} + T_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho_m C_{rk}}{\rho_m C_{rm}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_{ki} J_{ki}}{\rho_m C_{rm}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3-36)$$

## 3.2 颗粒悬浮流

### 3.2.1 混合物热力学<sup>[5]</sup>

凝聚态颗粒(液滴或粉尘)悬浮于气体中形成颗粒悬浮流。颗

粒称为离散相,根据其尺寸、温度和速度还可分为若干相。颗粒的存在改变了体系热力学性质,设微元控制体的体积为  $V$ , 质量为  $M$ , 则

$$V = V_g + V_p, \quad M = M_g + M_p$$

其中脚标“ $g$ ”和“ $p$ ”分别表示气相和颗粒相。于是,  $\bar{\rho}_p = \frac{M_p}{V}$  称为颗粒密度, 是一种固有体积平均值, 表示单位体积的颗粒所含颗粒材料的质量。  $\rho_p = \frac{M_p}{V}$  称为颗粒浓度, 是一种体积平均值, 表示单位体积的混合物中所含颗粒材料的质量。显然, 浓度和密度是有区别的。同样可以定义  $\rho_g = \frac{M_g}{V}$  和  $\bar{\rho}_g = \frac{M_g}{V}$ , 分别称为气体浓度和密度。混合物的密度则为  $\rho_m = \frac{M}{V}$ 。引入体积分数  $\varepsilon_p = \frac{V_p}{V}$ , 有

$$\rho_p = \varepsilon_p \frac{M_p}{V} = \varepsilon_p \bar{\rho}_p, \quad \text{即} \quad \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p} = \varepsilon_p, \quad (3-37)$$

$$\rho_p = (1 - \varepsilon_p) \bar{\rho}_p, \quad \text{即} \quad \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p} = 1 - \varepsilon_p, \quad (3-38)$$

稀薄悬浮流  $\varepsilon_p$  很小, 若令  $\varepsilon_p = 0$ , 有  $\rho_p = \bar{\rho}_p$ , 气体的浓度就是密度。

颗粒相质量与混合物总质量之比称为颗粒质量分数, 记作  $Y_p$ ,

$$Y_p = \frac{M_p}{M} = \frac{\rho_p}{\rho_m} = \varepsilon_p \frac{\bar{\rho}_p}{\rho_m} \quad \text{或} \quad \rho_m Y_p = \bar{\rho}_p \varepsilon_p, \quad (3-39)$$

由于  $(1 - Y_p) = \frac{\rho_g}{\rho_m} = \frac{(1 - \varepsilon_p) \bar{\rho}_g}{\rho_m}$ , 故

$$(1 - Y_p) \rho_m = (1 - \varepsilon_p) \bar{\rho}_g \quad (3-40)$$

由(3-39)式和(3-40)式得

$$\frac{Y_p}{1 - Y_p} \bar{\rho}_p = \frac{\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_p} \bar{\rho}_p, \quad (3-41)$$

代入(3-39)式可得

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{1 - Y_p}{\bar{\rho}_g} + \frac{Y_p}{\bar{\rho}_p} \quad (3-42)$$

悬浮流流过截面为  $A$  的管道时, 气相流率  $m_g = \rho u_g A$ , 颗粒相流

率  $m_r = \rho_r u_r A$ , 两相流率之比称为载荷比, 记作  $\eta$ , 即

$$\eta = \frac{m_r}{m_g} = \frac{\rho_r u_r}{\rho_g u_g}$$

将(3-37)式和(3-28)式代入上式, 得

$$\eta = \frac{\varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r} \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}_g} \frac{u_r}{u_g}$$

将(3-41)式代入上式得

$$\eta = \frac{Y_r}{1 - Y_r} \frac{u_r}{u_g} \quad \text{或} \quad Y_r u_r = (1 - Y_r) \eta u_g \quad (3-43)$$

对于无化学反应的定常流动,  $m_g = \text{常数}$  和  $m_r = \text{常数}$ , 故  $\eta = \text{常数}$ 。显然, 仅当  $u_r = u_g$  时  $Y_r = \text{常数}$ , 否则  $Y_r$  是变量。

颗粒足够小时, 可视作某种气体分子, 此时, 两相混合物视作多组元的气体混合物, 其分子量

$$W_m = \sum X_i W_i \quad (3-44)$$

或

$$\frac{1}{W_m} = \sum \frac{Y_i}{W_i}$$

其中  $X_i$  为组分  $i$  的摩尔分数;  $Y_i$  为组分  $i$  的质量分数;  $W_i$  为组分  $i$  的分子量。

分子量定义为某分子的质量与氢原子质量的比。设颗粒为大小相等半径为  $r_0$  的圆球(这里  $r_0$  是统计平均意义的等效半径), 则有

$$m_r = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \bar{\rho}_r$$

故颗粒分子量

$$W_r = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3 \bar{\rho}_r}{m_H} \quad (3-45)$$

其中  $m_H = 1.66 \times 10^{-24}$  克, 为氢原子的质量。

标准状况下, 气体的密度  $\rho_0 = m_H W_g \mathcal{L}$ , 其中,  $\mathcal{L} = 2.69 \times 10^{-19}$   $\text{cm}^3$ , 故

$$W_r = \frac{4}{3} \pi r_0^3 W_r \frac{\bar{\rho}_r}{\rho_0}$$

将  $Y_g = \frac{p_g}{p_m} = 1 - Y_r$  代入(3-44)式得

$$\frac{1}{W_m} = \frac{Y_r}{W_r} + \frac{1 - Y_r}{W_g} = \frac{3\rho_0}{4\pi r_0^3 W_g \rho_r} Y_0 + \frac{1 - Y_r}{W_g}$$

根据 Dalton 分压定律

$$\frac{p_g}{p_m} = X_g = \frac{(1 - Y_r)W_m}{W_g} = (1 + k)^{-1} \quad (3-46)$$

其中  $k = \frac{Y_r}{1 - Y_r} \frac{6}{\pi} \frac{\rho_0}{d_0^3 \rho_r}$ ,  $d_0$  为颗粒直径。

计算表明,即使  $Y_r$  很大,当  $d_0$  在几百分之一微米量级时,  $k \ll 0.01$ , 于是(3-46)式可近似写成  $\frac{p_g}{p_m} = 1 - k$ 。即直径大于 0.01 微米的颗粒对混合物压力的贡献小于 1%, 直径愈大贡献愈小。因此, 可以忽略颗粒热运动对混合物压力的影响, 令  $p_g = p_m$ 。

如果气相为完全气体, 则

$$p_m = \frac{R}{W_g} \rho_g T_g = \frac{R}{W_g} \frac{1 - Y_r}{1 - \varepsilon_r} \rho_m T_g = \frac{\frac{R}{W_g} (1 - Y_r) \rho_m T_g}{1 - \frac{Y_r \rho_m}{\rho_r}} \quad (3-47)$$

这说明混合物已不是完全气体。

如果忽略颗粒所占体积, 即  $\varepsilon_r = 0$ , 上式可写成

$$\rho_m = \frac{R}{W_g} (1 - Y_r) \rho_m T_g = \frac{R}{W_m} \rho_m T_g \quad (3-48)$$

其中  $W_m = \frac{W_g}{1 - Y_r}$  称为等效分子。故忽略颗粒对压力的贡献和颗粒所占体积时, 混合物可视作完全气体。

根据混合规则, 混合物的比内能为各组分比内能加权之和, 其权为质量分数

$$e_m = (1 - Y_r)e_g + Y_r e_r = (1 - Y_r)C_r T_g + Y_r C_r T_r$$

其中  $C_r$  是气体的定容比热,  $C$  是颗粒比热。

$$\begin{aligned} h_m = e_m + \frac{p}{\rho_m} &= (1 - Y_r)C_r T_g + Y_r \left( C_r T_r + \varepsilon_r \frac{p}{\rho_r} \right) \\ &= (1 - Y_r)h_g + Y_r h_r \end{aligned}$$



两相温度相等时

$$C_{rm} = (1 - Y_p)C_v + Y_p C$$

$$C_{pm} = (1 - Y_p)C_p + Y_p C$$

故混合物的绝热指数

$$\Gamma = \frac{C_{pm}}{C_{rm}} = \gamma \frac{1 + \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}}{1 + \gamma \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}} \quad (3-49)$$

其中  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  为气体绝热指数;  $\delta = \frac{C}{C_p}$  为两相比热比。 $\gamma$  和  $\delta$  为常数, 由于  $Y_p$  是变化的, 故  $\Gamma$  不是常数。 $\Gamma$  与  $Y_p$  的关系曲线如图 3-4 所示。因为  $\gamma > 1$ , 故  $\Gamma < \gamma$ , 即颗粒的存在使混合物的绝热指数值下降。

显然  $Y_p = 1$  时  $\Gamma = 1$ , 对应于等温过程  $pv = \text{常数}$ 。因此无论  $\delta$  为何值,  $Y_p \rightarrow 1$  时, 压缩或膨胀产生的热效应皆因颗粒传热而均化。

对于等熵过程, 两相处于平衡状态, 有  $u_p = u_g$  和  $T_p = T_g$ , 根据热力学第一定律

$$\begin{aligned} \frac{(1 - Y_p)C_v + Y_p C}{\frac{R}{W_g}(1 - Y_p)} \frac{dT}{T} \\ = \frac{1}{1 - \varepsilon_p} \frac{d\rho_m}{\rho_m} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{dT}{T} = \frac{1}{1 - \varepsilon_p} \frac{d\rho_m}{\rho_m}$$

平衡状态  $Y_p = \text{常数}$ , 由 (3-39) 式

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} = \frac{d\varepsilon_p}{\varepsilon_p} \text{ 代入上式}$$

$$\frac{1}{\Gamma - 1} \frac{dT}{T} = \frac{d\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_p} + \frac{d\varepsilon_p}{\varepsilon_p}$$

$$\text{积分} \quad T \left( \frac{\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_p} \right)^{-(\Gamma-1)} = \text{常数}$$

$$\text{即} \quad T \left( \frac{\rho_m}{1 - \varepsilon_p} \right)^{-(\Gamma-1)} = \text{常数}$$

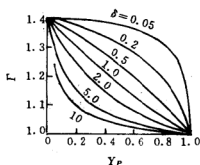


图 3-4  $Y_p - \Gamma$  关系曲线

$Y_p$ —颗粒质量分数;

$\Gamma$ —绝热指数

进而有  $T\bar{\rho}^{-(\gamma-1)} = \text{常数}$

根据完全气体状态方程

$$p\bar{\rho}^{-\gamma} = \text{常数}$$

或

$$pT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{常数}$$

混合物的等熵绝热关系式与气体的形式上完全一致,但绝热指数不同。

### 3.2.2 颗粒受力

当颗粒运动速度  $u$ , 不同于流体质点运动速度  $u$  时, 颗粒将受到流体的粘性阻力, 其大小与颗粒的形状、大小及周围流场的结构等因素有关。球形颗粒在不可压缩流体中缓慢运动时, Reynolds 数很小, 即  $R_{e,r} \ll 1$ , 其中  $R_{e,r} = \frac{\rho_l d_0 |u - u_r|}{\mu}$ ,  $\mu$  为流体的粘性系数,  $\rho_l$  为流体密度。此时流场中的惯性力远小于粘性力, 若忽略惯性项, 方程可大大简化。由此, Stokes 得到颗粒受力公式<sup>[6]</sup>

$$F_D = 2\pi\mu d_0(u - u_r) \quad (3-50)$$

称为 Stokes 阻力公式,  $F_D$  为 Stokes 阻力。该式的适用范围为  $R_{e,r} < 1$ 。

引进阻力系数  $C_D$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho|u - u_r|(u - u_r)\frac{\pi}{4}d_0^2}$$

代入(3-50)式得

$$C_D = \frac{24}{R_{e,r}} \quad (3-51)$$

惯性项  $\rho u \frac{\partial u}{\partial r}$  与压力梯度项  $\frac{\partial p}{\partial r}$  之比约为  $\frac{R_{e,r}}{4}$ , 而压力梯度项与粘性项同一量级, 故当  $R_{e,r}$  较大时惯性项不可忽略。Oseen 在方程中保留某些惯性项<sup>[1]</sup>得到

$$F_D = 3\pi\mu d_0(u - u_r) \left( 1 + \frac{3}{16}R_{e,r} \right) \quad (3-52)$$

$$\text{或} \quad C_D = \frac{24}{R_{e_p}} \left( 1 + \frac{3}{16} R_{e_p} \right) \quad (3-53)$$

其适用范围为  $R_{e_p} < 5$ 。

随着  $R_{e_p}$  的增大, 绕颗粒的流谱变得愈来愈复杂。当  $R_{e_p} \sim 10$  时, 颗粒背面可能形成涡环。  $R_{e_p}$  进一步增大时, 涡环可能发展为 Von Karman 涡街, 涡街的进一步发展则形成脱离球体的尾流, 此时颗粒外的绕流流场大致分为三个部分, 如图 3-5 所示。颗粒迎风

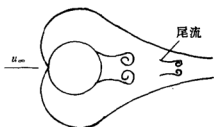


图 3-5 颗粒绕流

面有一滞止区域, 然后是边界层区域, 背面是分离流区域或称为尾流区域。阻力公式大都由实验获得, 例如 Wallis—Kliachko 公式

$$C_D = \frac{24}{R_{e_p}} \left( 1 + \frac{1}{6} R_{e_p}^{\frac{2}{3}} \right) \quad (3-54)$$

$C_D$  通常具有  $C_D = \frac{24}{R_{e_p}} f(R_{e_p})$  的形式, 称为标准阻力系数, 当  $f(R_{e_p}) = 1$  时, 即为 Stokes 方程。

对于  $700 < R_{e_p} < 2 \times 10^8$ , 常采用 Newton 公式, 这也是实验获得的经验公式

$$F_D = 0.22 \pi r_0^2 \rho (u - u_p)^2$$

相应的阻力系数为

$$C_D = 0.44 \quad (3-55)$$

图 3-6 为实验结果<sup>[1]</sup>与各种计算结果的比较。

对于可变形的液滴, 阻力作用下内部流场的变化使得问题更为复杂<sup>[1]</sup>。早期的研究仍基于 Stokes 模型, 对公式作适当修正。当  $R_{e_p} < 1$  时

$$F_D = 3\pi\mu l_0 V_0 A \quad (3-56)$$

其中修正系数  $A = \frac{2\mu + 3\mu_i}{3\mu + 3\mu_i} < 1$ ,  $\mu_i$  为液滴内部的粘性系数,  $V_0$  为液滴质心相对于流体的运动速度。若考虑液滴运动导致的表面应力

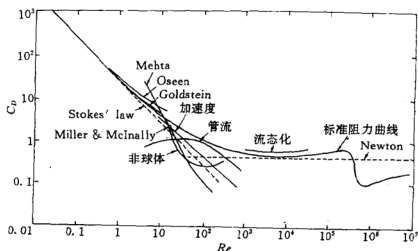


图 3-6 单球体的阻力系数

的变化

$$F_D = 3\pi\mu d_0 V_0 A_1 \quad (3-57)$$

其中  $A_1 = \frac{\mu_s + r_0(2\mu + 3\mu_p)}{\mu_s + 3r_0(\mu + \mu_p)}$ ,  $\mu_s$  为液滴表面的粘性。

当  $Re_p > 100$  时, 液滴表面的应力导致内部的环流, 称为 Hill 涡流。此时, 液滴内部分为气液界面附近的边界层区域, Hill 涡流区域和无粘尾流区域, 见图 3-7。Chao<sup>[7]</sup> 利用边界层理论对此进行了

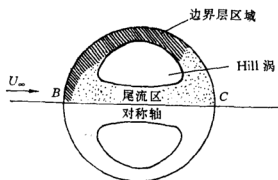


图 3-7 液滴中的环流

计算, 获得的阻力公式为

$$C_D = \frac{32}{R_{cp}} \left[ 1 + 2 \frac{\mu_p}{\mu} - 0.314 \frac{1 + 4 \frac{\mu_p}{\mu}}{R_{cp}^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3-58)$$

颗粒与流体之间的质量交换,例如液滴的蒸发,高速气流作用下液滴的剥离,固体颗粒中挥发分的挥发和化学反应生成的气相产物等等,将影响阻力系数  $C_D$  的值。有些公式是通过实验给出的,如<sup>[8]</sup>

$$C_D = \begin{cases} 27 R_{cp}^{-0.84} & \text{当 } R_{cp} < 80 \\ 0.27 R_{cp}^{0.21} & \text{当 } 80 \leq R_{cp} \leq 10^4 \\ 2 & \text{当 } R_{cp} > 10^4 \end{cases} \quad (3-59)$$

或<sup>[9]</sup>

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{R_{cp}} \left( 1 + \frac{R_{cp}^{\frac{2}{3}}}{6} \right) & \text{当 } R_{cp} < 1000 \\ 0.44 & \text{当 } R_{cp} > 1000 \end{cases} \quad (3-60)$$

以及<sup>[10]</sup>

$$C_D = \begin{cases} \frac{27}{R_{cp}^{0.34}} & \text{当 } R_{cp} < 80 \\ 0.271 R_{cp}^{0.217} & \text{当 } 80 \leq R_{cp} \leq 10^4 \end{cases} \quad (3-61)$$

也有简单推导获得的,如<sup>[11]</sup>

$$\frac{C_D}{C_{D0}} = \frac{\ln(1+B)}{B} \quad (3-62)$$

其中  $C_{D0}$  为不考虑质量传递的阻力系数,  $B = -\frac{\dot{m}_p}{2\pi r_0^2 \rho_g |u_g - u_p| C_D}$ ,  $\dot{m}_p$  为颗粒的质量消耗率。

流场中具有压力梯度时,流体任一体积元都将受到由此产生的浮力的作用<sup>[4]</sup>,其值为  $F_E = -V \frac{dp}{dx}$ ,大小仅与流元体积有关。粗略估计浮力  $F_E$  与粘性阻力  $F_D$  的大小,假设  $F_D = \bar{\rho}_p V \frac{du}{dt}$ ,无粘流体的动量方程为  $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ ,故

$$F_D = -\bar{\rho}_p \frac{V_p}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\bar{\rho}_p}{\rho} F_E$$

因此当  $\frac{\rho}{\rho_s} \rightarrow 10^{-3}$  时, 可以忽略压力梯度效应。

由于粘性, 附着在颗粒表面的气体将与颗粒一起运动, 其附着量为颗粒排斥气体质量的一半, 即  $\frac{1}{2}V_s\rho_s$ 。推动颗粒运动的力不但用来增加颗粒本身的动能而且用来增加附着流体的动能, 这种额外的力称为虚假质量力

$$F_{vm} = \frac{1}{2}V_s\rho_s\xi$$

其中  $\xi = \frac{d}{dt}(u - u_s)$ , 为颗粒相对于流体质点的加速度。

为满足附面条件, 颗粒表面附近的气体必须从主气流速度加速到颗粒速度, 这种持续调整所需的力与颗粒运动历史有关, 称之为 Basset 力<sup>[4]</sup>

$$F_{\text{Basset}} = \frac{3}{2}d_0^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_{t_0}^t \frac{\xi}{\sqrt{t-t'}} dt'$$

如果  $\xi = \text{常数}$ , 即颗粒均加速运动, 令  $t_0 = 0$

$$F_{\text{Basset}} = \frac{3}{2}d_0^2 \sqrt{\pi\rho_s\mu_s\xi} \sqrt{t}$$

由于  $F_D = \frac{1}{6}\pi d_0^3\bar{\rho}_s\xi$ , 故

$$\frac{F_{\text{Basset}}}{F_D} = \left( \frac{18}{\pi} \frac{\rho_s}{\rho_s} \frac{t}{\tau_s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中  $\tau_s = \frac{\bar{\rho}_s d_0^2}{18\mu}$ , 称为动量弛豫时间。因此, 当  $\frac{\rho}{\rho_s} \rightarrow 10^{-3}$ ,  $t = \frac{\tau_s}{2}$  时,

$\frac{F_{\text{Basset}}}{F_D} < \frac{1}{10}$ 。虚假质量力和 Basset 力都是颗粒变速引起的, 称为非定常力。

某些情况下, 颗粒在流场中还会受到升力作用, 如颗粒旋转时受到 Magnus 升力, 有速度梯度的流场中受到 Saffman 升力等等。这里不作讨论。

当悬浮颗粒的浓度足够低, 忽略颗粒间的相互影响时, 根据牛顿第二定律, 颗粒运动轨迹方程为

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} d_0^3 \rho_p \frac{du_p}{dt_p} &= \frac{\pi}{8} d_0^2 \rho_g C_D |u_g - u_p| (u_g - u_p) - \frac{\pi}{6} d_0^3 \frac{\partial p}{\partial r} n_p \\ &+ \frac{\pi}{12} d_0^3 \rho_g \xi + \frac{3}{2} d_0^2 \sqrt{\pi \rho_g \mu_g} \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{t-t'}} dt' + f \end{aligned} \quad (3-63)$$

其中  $f$  表示场力及其它诸力, 脚标  $p$  和  $g$  分别表示颗粒和气相。

除极端情况外, 如非常高的压力, 非常低的颗粒固有密度, 非常大的动量弛豫时间等等, 一般情况下, 仅考虑 Stokes 力, 取  $C_D =$

$\frac{24}{Re_p} f(Re_p)$  时

$$\frac{du_p}{dt_p} = (u_g - u_p) f(Re_p) / \tau_s \quad (3-64)$$

其中  $\tau_s = \frac{\rho_p d_0^2}{18\mu} = \frac{m_p(u_g - u_p)}{F_D}$  为颗粒的相对动量与所受阻力之比。

对于一维问题  $f(Re_p) = 1$  时

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{(u_g - u_p)}{\tau_s}$$

若初始条件为  $t=0$  时,  $u_p=0$ ,  $u_g=\text{常数}$ , 有解

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right) = 1 - \frac{u_p}{u_g}$$

当  $t = \tau_s$  时,  $u_p = 0.68u_g$ , 因此  $\tau_s$  为静止颗粒在气流作用下速度达到 68% 气流速度所需的时间, 它是两相间动量弛豫的特征时间。

### 3.2.3 两相热传导

气体与颗粒存在温差时, 两相热传导可用 Newton 对流热传导方程表示

$$q = h(T_{ps} - T_{g\infty}) \quad (3-65)$$

其中  $T_{ps}$  为颗粒表面温度,  $T_{g\infty}$  为气相温度,  $q$  为单位面积的颗粒外表面的热通量,  $h$  为热传递系数。

根据 Fourier 定律

$$q = -k \left( \frac{\partial T_g}{\partial r} \right)_s$$

其中  $\left( \frac{\partial T_g}{\partial r} \right)_s$  为颗粒表面处气体温度的法向梯度,  $k$  为传热系数。

引进无量纲量  $Y = \frac{r}{d_0}$ ,  $\theta = \frac{T_g - T_{g\infty}}{T_{gs} - T_{g\infty}}$ , 其中  $r$  为空间某点到颗粒球心的距离。由上式

$$N_s = - \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_s$$

其中  $N_s = \frac{qd_0}{k(T_{gs} - T_{g\infty})}$  称为 Nusselt 数。由 (3-65) 式得

$$N_s = \frac{hd_0}{k}$$

量纲分析表明<sup>[12]</sup>

$$N_s = F(R_{cr}, P_r)$$

Stokes 定律成立时, 上式总具有如下级数形式<sup>[13]</sup>

$$N_s = 2 + \frac{1}{2} R_{cr} P_r + \frac{1}{6} (R_{cr} P_r)^2 + \dots$$

$R_{cr} = 0$  时, 即颗粒与气相无相对运动时,  $N_s = 2$ 。

大  $R_{cr}$  的颗粒绕流相当复杂,  $N_s$  或  $h$  皆指颗粒表面的平均值, 大都由经验公式表示, 如 Drake 方程<sup>[14]</sup>

$$N_s = 2 + 0.459 R_{cr}^{0.55} P_r^{0.22} \quad (3-66)$$

其适用范围为  $1 < R_{cr} < 7000$  和  $0.6 < P_r < 400$ 。

Ranz-Marshall 方程<sup>[15]</sup>

$$N_s = 2 + 0.6 R_{cr}^{\frac{1}{3}} P_r^{\frac{1}{2}} \quad (3-67)$$

考虑两相质量传递时

$$N_s = \frac{2 \ln(1+B)}{B} \quad (3-68)$$

其中  $B$  为质量传递系数 (参见第四章第 2 节)。流动系统可修正为<sup>[16]</sup>

$$N_s = \frac{2 \ln(1+B)}{B} (1 + 0.39 R_{cr}^{\frac{1}{3}} P_r^{\frac{1}{2}}) \quad (3-69)$$



如果考虑高温热辐射,根据 Stefan—Bolzmann 定律<sup>[17]</sup>,辐射体不接受其它辐射时

$$Q_r = \bar{\epsilon}\sigma T_p^4$$

其中  $Q_r$  为单位颗粒表面的热量辐射率,  $\bar{\epsilon}$  为颗粒表面辐射率,  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$  为 Boltzmann 数。如果接受壁面热辐射

$$Q_r = \bar{\epsilon}\sigma(T_w^4 - T_p^4)$$

脚标  $w$  表示壁面温度。参照对流传热公式

$$Q_r = h_r(T_w - T_p)$$

其中  $h_r = \bar{\epsilon}\sigma(T_w^2 + T_p^2)(T_w + T_p)$  为热辐射传递系数。

颗粒内部存在温度梯度和化学反应时,能量守恒方程为<sup>[18]</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + \frac{Q}{\rho_s C}$$

其中  $\alpha = \frac{k_r}{\rho_s C}$  为颗粒热扩散系数,  $Q$  为单位颗粒体积的能量释放率。

在  $r=r_0$  处

$$Q = h(T_p - T_{\infty})$$

引进无量纲常数

$$B_i = \frac{hd_0}{\alpha}$$

称为 Biot 数,表示两相对流传热与颗粒内部热传导之比。一般认为,  $B_i < 0.2$  时,对流传热是控制步骤,忽略颗粒内部的温度梯度

$$V \bar{\rho}_s C \frac{dT_p}{dt_p} = V Q + h A_p (T_{\infty} - T_p)$$

对于惰性颗粒

$$\frac{\pi}{6} d_0^3 \bar{\rho}_s C \frac{dT_p}{dt_p} = h \pi d_0^2 (T_{\infty} - T_p)$$

若假设颗粒与气流无相对运动,即  $N_w = 2$

$$\frac{dT_p}{dt_p} = \frac{T_{q\infty} - T_p}{\tau_T} \quad (3-70)$$

其中  $\tau_T = \frac{d_0^2 \rho_p C}{12k}$ , 称为能量弛豫特征时间。根据  $\tau_u$  和  $\tau_T$  的定义

$$\tau_T = \frac{3}{2} P \delta \tau_u$$

其中  $\delta = \frac{C}{C_p}$ 。对于气体,  $P = \frac{2}{3}$ , 故  $\tau_T = \delta \tau_u$ 。当  $\delta = 1$  时,  $\tau_T = \tau_u$ , 即能量弛豫与动量弛豫的速率相同。

若方程(3-70)的初始条件为  $t=0$  时,  $T_p = T_{p0}$ , 设  $T_{q\infty} = \text{常数}$ , 有解

$$\frac{T_p - T_{q\infty}}{T_{p0} - T_{q\infty}} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right)$$

当  $t = \tau_T$  时,  $\frac{T_p - T_{q\infty}}{T_{p0} - T_{q\infty}} = 0.32$

故  $\tau_T$  为温差降至初始温差的 0.32 所需的时间, 它是两相间能量弛豫的特征时间。

### 3.2.4 颗粒悬浮流守恒方程<sup>[1,19]</sup>

相通常指物质存在的状态, 即物态。但流体力学中, 常将动力学性质相近的物质称为一相。这样, 颗粒群可按大小分成若干相, 有

$$\rho_p = \sum_k \rho_{pk}$$

其中  $\rho_{pk} = n_{pk} m_{pk}$ , 脚标  $k$  表示  $k$  相颗粒,  $n_{pk}$  为颗粒数密度, 即单位体积内  $k$  相颗粒的个数,  $m_{pk}$  为单个颗粒的质量。

$k$  相的质量守恒方程为

$$\frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{pk} u_{pki}}{\partial x_j} = \Gamma_{pk} \quad (3-71)$$

动量方程(3-21)中若取  $C_k = 0$ ,  $B_k = 0$ , 且忽略颗粒热运动对压力的贡献和颗粒相内部的粘性, 则

$$\frac{\partial \rho_{pk} u_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} u_{pk} u_{pkj}) = n_{pk} F_{pk} + \rho_{pk} f_{pk} + u_{mi} \Gamma_{pk}$$

或 
$$\rho_{pk} \frac{du_{pk}}{dt_{pk}} = n_{pk} F_{pk} + \rho_{pk} f_{pk} + (u_{mi} - u_{pk}) \Gamma_{pk}$$

当  $u_{mi} = u_i, f_{pk} = f_i = \text{常数}$

时

$$\frac{\partial \rho_{pk} u_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} u_{pk} u_{pkj}) = n_{pk} F_{pk} + \rho_{pk} f_i + u_i \Gamma_{pk} \quad (3-72)$$

$$\rho_{pk} \frac{du_{pk}}{dt_{pk}} = n_{pk} F_{pk} + \rho_{pk} f_i + (u_i - u_{pk}) \Gamma_{pk} \quad (3-73)$$

其中  $\frac{d}{dt_{pk}} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{pkj} \frac{\partial}{\partial x_j}$ 。

由能量方程(3-25)和动量方程(3-21),取  $B_k = 0, C_k = 0, C_{sk} = 0$ ,忽略颗粒内部的粘性和温度分布,忽略颗粒热运动对压力的贡献,忽略颗粒热辐射时

$$\frac{\partial \rho_{pk} C_{pk} T_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} C_{pk} T_{pk} u_{pkj}) = \beta \Gamma_{pk} Q_0 + n_{pk} q_{pk} + C_{pk} T_{pk} \Gamma_{pk} \quad (3-74)$$

或

$$\rho_{pk} \frac{dC_{pk} T_{pk}}{dt_{pk}} = n_{pk} q_{pk} + \beta \Gamma_{pk} Q_0 + C_{pk} T_{pk} \Gamma_{pk} - C_{pk} T_{pk} \Gamma_{pk} \quad (3-75)$$

其中  $Q_0$  为单位质量的颗粒燃烧释放的热,  $\beta$  为分配因子,表示颗粒释放的热在两相间的分配。

$F_{pk}$  为单个颗粒所受的力,仅考虑 Stokes 力时,  $F_{pk} = m_{pk} \frac{u_i - u_{pk}}{\tau_s}$ 。 $q_{pk}$  为单个颗粒从气相获得的热,  $q_{pk} = \pi N_s k d_0 (T - T_s)$ 。

考虑气相化学反应时

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = \Gamma \quad (3-76)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \Gamma u_i - \sum n_{pk} F_{pk} \quad (3-77)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C_p T u_j) &= \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \\
+ \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} + (1 - \beta) \Gamma Q_0 \\
- \sum n_{\mu} q_{\mu} + C_p T \Gamma + \omega_s Q_s
\end{aligned} \quad (3-78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_s) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j Y_s) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - \omega_s + \alpha_s \Gamma \quad (3-79)$$

其中  $\omega_s$  是气相组分  $s$  的反应速率,  $Q_s$  为其反应热,  $Y_s$  是该组分在气相中质量分数,  $\alpha_s$  为颗粒气化产物中(如蒸发组分, 燃烧产物等)组分  $s$  的质量分数,  $\Gamma = - \sum \Gamma_{\mu}$ 。

### 3.3 两相湍流燃烧

#### 3.3.1 均相模型<sup>[20~22]</sup>

当两相间的传递速率远较流场改变速率快时, 可视两相处于平衡状态(包括力学平衡、热力学平衡和相平衡), 即两相的速度和温度相同。该系统可用局部均匀流(LHF)模型描述, 它将多相混合物视作多组分均相混合物, 同一组分可存在于不同的相中。

以喷雾燃烧为例, 喷入静止的无限大介质中的液滴的平均流动通常是定常的, 且有轴对称和边界层特性<sup>[23]</sup>。流场的特征厚度  $\delta$  比轴向距离小得多, 量级分析时, 假定  $x, \bar{u}, \bar{\rho} \sim O(1), r \sim O(\delta)$ 。柱坐标中, 质量守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho' u') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho' v') = 0 \quad (3-80)$$

采用梯度近似

$$- \overline{\rho' u'} = \frac{v_t}{\sigma_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}$$

$$-\overline{\rho'v'} = \frac{v_i}{\sigma_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r}$$

取  $\sigma_r=1$ , (3-80) 式可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\bar{u}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(rv_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r}\right) = 0$$

要使径向变化起作用, 必有  $\bar{v} \sim O(\delta)$ ,  $v_i \sim O(\delta^2)$ , 故方程左端第二项可以忽略

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\bar{v}) = 0 \quad (3-81)$$

其中

$$\bar{\rho}\bar{v} = \bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho'v'}$$

动量守恒方程为

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} &= g(\bar{\rho}_\infty - \bar{\rho}) - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\overline{u'u'}) \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\overline{\rho'u'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\overline{\rho'v'}) \\ &- \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho'u'v'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\overline{\rho'u'v'}) - \overline{\rho'u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \end{aligned} \quad (3-82)$$

式中  $g$  为重力加速度。

略去三阶关联项, Reynold 应力项采用 Boussinesq 模型

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\overline{u'u'} &= -2\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \\ \bar{\rho}\overline{u'v'} &= \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

于是

$$\bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = g(\bar{\rho}_\infty - \bar{\rho}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{u} \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{v} \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right) + \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}
\end{aligned}$$

忽略高阶项

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) = g(\rho_\infty - \bar{\rho}) \quad (3-83)$$

混合分数的守恒方程为

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \overline{u' f'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \overline{v' f'}) \\
& - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \overline{\rho' f'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v} \overline{\rho' f'}) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho' u' f'}) \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{\rho' v' f'}) - \overline{\rho' u'} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \overline{\rho' v'} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}
\end{aligned}$$

略去三阶关联项和 $\overline{\rho' f'}$ 项,其余关联项采用梯度近似

$$\bar{\rho} \overline{f' u'} = - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

$$\bar{\rho} \overline{f' v'} = - \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \right) \\
& + \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}
\end{aligned}$$

略去高阶项

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\mu_i}{\sigma_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \right) = 0 \quad (3-84)$$

相应的  $K-\varepsilon-g$  方程为

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial K}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial K}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial K}{\partial r}\right) = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)^2 - \bar{\rho}\varepsilon \quad (3-85)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) = C_{s1}\frac{\varepsilon}{K}\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)^2 - C_{s2}\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{K} \quad (3-86)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial g}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mu_t}{\sigma_g}\frac{\partial g}{\partial r}\right) = C_{g1}\mu_t\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right)^2 - C_{g2}\bar{\rho}\frac{g\varepsilon}{K} \quad (3-87)$$

写成通式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\bar{v}\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mu_t}{\sigma_\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + S_\varphi \quad (3-88)$$

其中  $\mu_t = C_\mu \bar{\rho} k^2 / \varepsilon$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{s1} = 1.44$ ,  $C_{s1} = 2.8$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $\sigma_f = 0.7$ ,  $\sigma_g = 0.7$ 。不可压缩  $C_{s2} = C_{g2} = 1.89$ , 可压缩流  $C_{s2} = C_{g2} = 1.84$ 。

该方程的边界条件为

$$\begin{aligned} r = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \\ r = \infty \quad \varphi &= 0 \end{aligned}$$

此外还需给定: (1) 喷射物质的质量流量; (2) 喷嘴出口处的热力学状态和冲量; (3) 喷嘴出口处的  $K$  和  $\varepsilon$  分布。

对于无限快的不可逆反应(如 2.3.2 节所述), 可以由  $\bar{f}$  和  $g$  构造混合分数  $f$  的 PDF, 进而求得流场中的组元浓度和温度。如果为可逆反应, 可视反应处于局部平衡状态, 此时混合物的焓, 组分、温度和密度等皆是混合分数  $f$  的函数, 即满足某种关系式。一般讲, 喷雾系统的压力较高, 考虑气体的非理想效应和液体中的溶

解,对于组分  $i$

$$Y_i = f_i Y_{fi} + (1 - f_f) Y_{gi} \quad i = 1, \dots, n \quad (3-89)$$

其中  $Y_i$ ,  $Y_{fi}$  和  $Y_{gi}$  分别表示组分  $i$  在混合物, 液相和气相中的质量百分数。 $f_f$  表示组分  $i$  分配在液相中的比例。

根据定义

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n Y_{fi} = \sum_{i=1}^n Y_{gi} = 1 \quad (3-90)$$

设  $j$  元素在组分  $i$  中的质量分数为  $v_{ij}$ , 根据元素守恒方程

$$\sum_{i=1}^n v_{ij} Y_i = \sum_{i=1}^n v_{ij} (f Y_{fi} + (1 - f) Y_{gi}) \quad j = 1, \dots, m \quad (3-91)$$

于是有  $n - m - 1$  个独立的化学反应方程

$$\sum_{i=1}^n v'_{li,i} (M_i) \rightleftharpoons \sum_{i=1}^n v''_{li,i} (M_i) \quad l = 1, \dots, n - m - 1$$

其中  $v'_{li}$ ,  $v''_{li}$  为反应计量系数,  $M_i$  为组分  $i$  的分子式。对应的化学平衡方程为

$$\prod_{i=1}^n F_{gi} (v''_{li} - v'_{li}) = K_{gfl} \quad l = 1, \dots, n - m - 1 \quad (3-92)$$

其中  $K_{gfl}$  表示气相中第  $l$  个反应的化学平衡常数, 考虑气体非理想效应时用逸度  $F_{gi}$  代替浓度  $C_{gi}$ 。<sup>[24]</sup> 脚标  $g$  表示气相。相平衡条件为

$$F_{gi} = F_{fi} \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (3-93)$$

由能量守恒

$$\sum_{i=1}^n (f_f Y_{fi} h_{fi} + (1 - f_f) Y_{gi} h_{gi}) = f h_0 + (1 - f) h_{\infty} \quad (3-94)$$

其中

$$h_p = \Delta h_p + \int_{T_r}^T C_{p,gi}^0 dT + h_{gi}^0$$

其中  $p=f$  或  $g$ ,  $h_{gi}^0$  为组分  $i$  在温度  $T_r$  时的生成焓,  $\Delta h_p$  为温度  $T$  时真实气体的焓差。



混合物的密度为

$$\rho = \left( \sum_{i=1}^n f_i Y_{fi} / \rho_{fi} + (1 - f_f) Y_{gr} / \rho_{gr} \right)^{-1} \quad (3-95)$$

其中  $\rho_{fi}$  和  $\rho_{gr}$  分别为组分  $i$  在液相和气相中的偏摩尔密度。

方程(3-82)至方程(3-88)为  $(3n+3)$  个方程, 含  $3n+4$  个未知量, 即  $f, Y_i, Y_{fi}, Y_{gr}, f_f, T$  和  $\rho$ 。若选  $f$  为自变量, 其余  $3n+3$  个变量皆可用  $f$  来表示。以戊烷喷雾燃烧为例<sup>[25]</sup>, 图 3-8 为流场某些参数与混合分数  $f$  的关系曲线。图 3-9~图 3-11 所示为流场参数在空间的变化曲线。

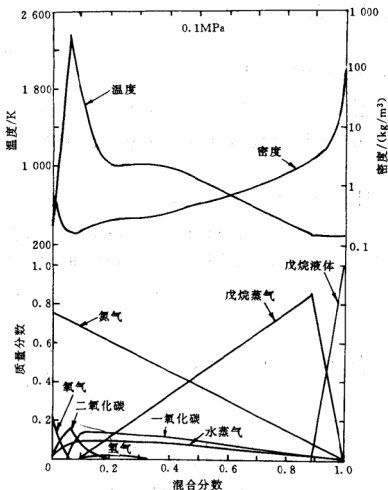
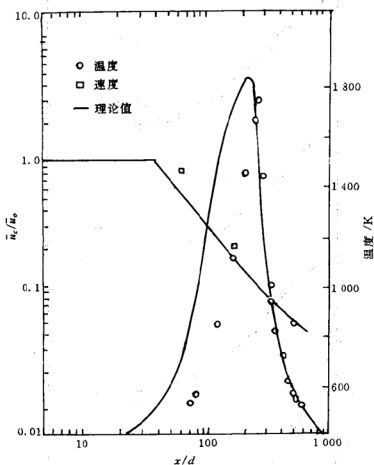


图 3-8 流场参数与混合分数  $f$  的关系曲线

图 3-9 轴向速度和温度沿  $x$  轴的变化

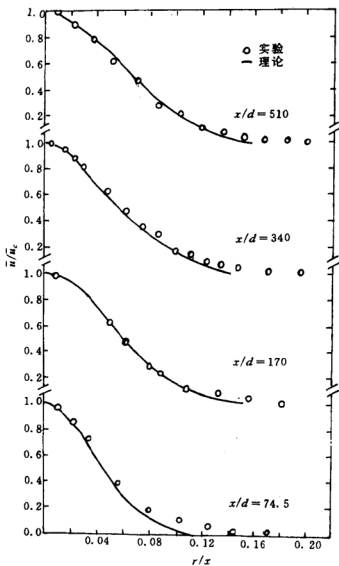
### 3.3.2 分离流模型<sup>[24,25]</sup>

#### 一、小滑移模型

对于形状不规则的颗粒,可用与其体积相同的球的直径  $d$  表示其大小,称为粒径。粒径的分布称为粒度分布,分为两种:一种基于颗粒数密度,记作  $n'(s)$ ,其物理意义为

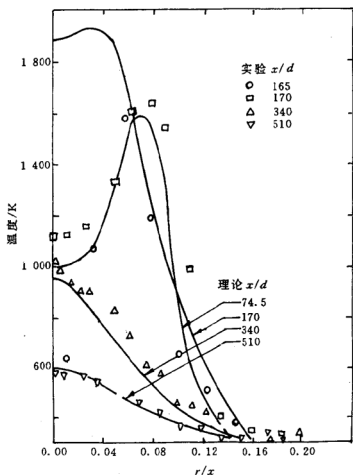
$n'(s)\Delta s$  = 粒径在  $s$  和  $s + \Delta s$  之间的颗粒数密度

其中  $s=d^2$ 。另一种基于质量分数,记作  $Y'(s)$ ,其物理意义为

图 3-10 轴向速度沿  $r$  轴的变化

$Y'(s)\Delta s$  = 粒径在  $s$  和  $s + \Delta s$  之间的颗粒在混合物中的质量分数  
因此

$$n_p = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} n'(s) ds$$

图 3-11 温度沿  $r$  轴的变化

$$\rho_r = \rho_n \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} Y'(s) ds$$

设颗粒具有相同的温度和材料密度, 于是

$$n' = n'(s, x, t, u_r)$$

根据 Liouville 定理<sup>[26]</sup>

$$\frac{dn'}{dt} = \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(n' s') + \frac{\partial}{\partial x}(n' u_r) + \frac{\partial}{\partial u_r} \left( n' \frac{du_r}{dt} \right) = S,$$

其中  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  为颗粒大小变化率,  $s$ , 反映颗粒运动过程中的聚合和

裂解。当  $\frac{\partial}{\partial u_j} = 0, S_j = 0$  和  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$  时

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \dot{s} \frac{\partial n'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_j} (n' u_{nj}) = 0$$

由于  $m_j = \bar{\rho}_j \frac{\pi d^3}{6}$  在相空间仅与  $s$  有关

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho'_j u_{nj}) = -m_j s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho'_j}{m_j} \right)$$

其中  $\rho'_j = m_j n'$ , 故

$$\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \rho'_j ds = \rho_j$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho'_j}{m_j} \right) = \frac{1}{m_j} \left( \frac{\partial \rho'_j}{\partial s} - \frac{\rho'_j}{m_j} \frac{\partial m_j}{\partial s} \right) = \frac{1}{m_j} \left( \frac{\partial \rho'_j}{\partial s} - \frac{3}{2} \frac{\rho'_j}{s} \right)$$

故

$$\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho'_j u_{nj}) = -\dot{s} \left( \frac{\partial \rho'_j}{\partial s} - \frac{3}{2} \frac{\rho'_j}{s} \right) \quad (3-96)$$

进而有

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_j u_{nj}) = -\dot{s} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left( \frac{\partial \rho'_j}{\partial s} - \frac{3}{2} \frac{\rho'_j}{s} \right) ds = I_j \quad (3-97)$$

若将颗粒按粒径大小分为若干组, 尺寸在  $s_i$  与  $s_{i+1}$  之间的为  $k$  组, 如图 3-12 所示,  $k$  组颗粒的质量分数为

$$Y_{jk} = \int_{s_{i+1}}^{s_i} Y'(s) ds$$

同样

$$n_{jk} = \int_{s_{i+1}}^{s_i} n'(s) ds$$

$$\rho_{jk} = \int_{s_{i+1}}^{s_i} \rho'_j ds = \rho_m Y_{jk}$$

故(3-96)式可写成

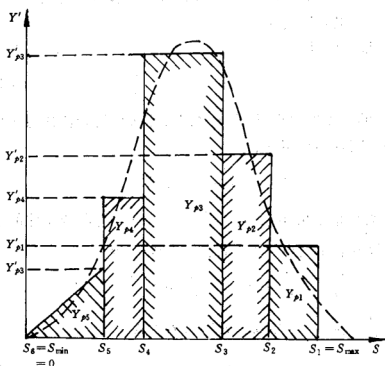


图 3-12 粒度分布函数

$$\frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{pk} u_{pkj}) = - \dot{s} \int_{s_{k+1}}^{s_k} \left( \frac{\partial \rho'_2}{\partial s} - \frac{3}{2} \frac{\rho'_2}{s} \right) ds = \Gamma_{pk} \quad (3-98)$$

$$\text{由于} \quad \int_{s_{k+1}}^{s_k} \left( \frac{\partial \rho'_2}{\partial s} - \frac{3}{2} \frac{\rho'_2}{s} \right) ds = \rho'_{2,k} - \rho'_{2,k+1} - \frac{3}{2} \int_{k+1}^k \frac{\rho'_2}{s} ds$$

$$\int_{s_{k+1}}^{s_k} \frac{\rho'_2}{s} ds = \frac{\rho'_{2k}}{s_k} (s_k - s_{k+1})$$

若取  $\rho'_{pk} = \frac{Y_{pk} \rho_m}{s_k - s_{k+1}}$ , 则有

$$\Gamma_{pk} = - \dot{s} \rho_m G \quad (3-99)$$

其中

$$G = \frac{Y_{pk}}{s_k - s_{k+1}} - \frac{Y_{pk+1}}{s_{k+1} - s_{k+2}} - \frac{3}{2} \frac{Y_{pk}}{s_k}$$

该式右端第一项表示大尺寸颗粒因缩小进入  $k$  组, 使该组颗粒数增加, 第二项表示  $k$  组颗粒因缩小进入其它尺寸组, 使该组颗粒数

减少,第三项表示  $k$  组颗粒反应后仍留在该组,虽未使该组颗粒数变化,却使该组质量减少。

同样推导可得

$$\frac{\partial n_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{jk}u_{jkj}) = -\frac{\dot{s}n_{jk}}{Y_{jk}}G \quad (3-100)$$

若两相间的速度差很小,相当于多组分系统中混合流体与组分之间的差异,则有 Fick 定律

$$\rho_{jk}(u_{jki} - u_{mi}) = -\rho_m D_m \frac{\partial Y_{jk}}{\partial x_i}$$

其中  $D_m$  为质量扩散系数,  $u_{mi} = \sum_k u_{jk} Y_{jk} + u_i Y$  为混合流体的宏观速度,无脚标表示气相。将上式代入方程(3-98)

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_{jk}u_{mij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_m D_m \frac{\partial Y_{jk}}{\partial x_j}\right) + \Gamma_{jk}$$

将  $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_m u_{mj}) = 0$  和  $\rho_{jk} = \rho_m Y_{jk}$  代入上式

$$\rho_m \frac{\partial Y_{jk}}{\partial t} + \rho_m u_{mj} \frac{\partial Y_{jk}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_m D_m \frac{\partial Y_{jk}}{\partial x_j}\right) + \Gamma_{jk} \quad (3-101)$$

颗粒相的能量方程为

$$\frac{\partial \rho_{jk} C_{jk} T_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_{jk} C_{jk} T_{jk} u_{jkj}) = \beta \Gamma_{jk} Q_s + n_{jk} q_{jk} + C_{jk} T \Gamma_{jk}$$

气相守恒方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = \Gamma$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \Gamma u_i - \sum_k n_{jk} F_{jk}$$

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho C_p T u_j) = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} + (1 - \beta) \Gamma Q_c - \sum_k n_{jk} q_{jk} + C_p T \Gamma$$

当马赫数  $M \ll 1$  时

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \Gamma u_i - \sum_k n_{jk} F_{jk} \quad (3-102)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho C_p T u_j) &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} + (1 - \beta) \Gamma Q_p \\ &\quad - \sum n_{pk} q_{pk} + C_p T \Gamma \end{aligned} \quad (3-103)$$

考虑湍流时,对方程进行 Reynolds 分解,忽略颗粒相的密度、温度和质量损耗的脉动,组元方程中的关联项  $\overline{u'_i Y'_{pk}}$  采用梯度模拟,

即  $-\overline{u'_i Y'_{pk}} = \frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{Y}_{pk}}{\partial x_i}$ , 于是

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}_{pk} \bar{u}_{pkj}) = \bar{\Gamma}_{pk} \quad (3-104)$$

$$\frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{n}_{pk} \bar{u}_{pkj}) = -\frac{\bar{s}_{pk}}{\bar{Y}_{pk}} \bar{G} \quad (3-105)$$

$$\bar{\rho}_m \frac{\partial \bar{Y}_{pk}}{\partial x_j} + \bar{\rho}_m \bar{u}_{mj} \frac{\partial \bar{Y}_{pk}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho}_m D_{eff} \frac{\partial \bar{Y}_{pk}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Gamma}_{pk} \quad (3-106)$$

$$\bar{\rho}_{pk} (\bar{u}_{pki} - \bar{u}_{mi}) = -\bar{\rho}_m D \frac{\partial \bar{Y}_{pk}}{\partial x_i} \quad (3-107)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_{pk} C_{pk} \bar{T}_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_{pk} C_{pk} \bar{T}_{pk} \bar{u}_{pkj}}{\partial x_j} &= B \bar{\Gamma}_{pk} Q_c + \bar{n}_{pk} \bar{q}_{pk} + C_p \bar{T} \bar{\Gamma}_{pk} \end{aligned} \quad (3-108)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{pk} &= -\bar{s}_{pk} \bar{G} \\ \bar{G} &= \frac{\bar{Y}_{pk}}{s_k - s_{k+1}} - \frac{\bar{Y}_{p,k+1}}{s_{k+1} - s_{k+2}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{Y}_{pk}}{s_k} \\ D_{eff} &= D_m + \frac{v_T}{\sigma_T} \end{aligned}$$

混合物的质量守恒方程为

$$\frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_m \bar{u}_{mj}}{\partial x_j} = 0 \quad (3-109)$$

气相湍流  $K-\varepsilon$  模型

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{\Gamma} \quad (3-110)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_{eff} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right)$$



$$+ \bar{T} \bar{u}_i - \sum \bar{n}_{jk} \bar{F}_{jk} \quad (3-111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} C_i \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} C_i \bar{T} \bar{u}_j) &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \\ &+ (1 - \beta) \bar{T} Q_c - \sum \bar{n}_{jk} \bar{q}_{jk} - C_i T \Gamma \end{aligned} \quad (3-112)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + v_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{K} \left( C_i v_T \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right)$$

其中  $\mu_{eff} = \mu + \mu_T$ ,  $k_{eff} = k + \frac{v_T}{\sigma_T}$ ,  $\mu_T = \rho v_T = \rho C_i \frac{K^2}{\varepsilon}$ , 该模型称为“小滑移模型”。

## 二、颗粒轨道模型

颗粒轨道模型将颗粒分成若干颗粒群,每群颗粒具有相同的特性,即相同的大小、温度和速度等,从而用单个颗粒来描述。这样,颗粒相被离散为若干有限颗粒,它们互不干扰,沿着各自的轨道运动,可在 Lagrange 坐标中研究其变化历程(包括大小、速度和温度变化等等)。气体与颗粒之间的输运在气相方程中可用等价的、连续分布的源项来描述。

气相守恒方程仍为方程(3-76)、方程(3-77)和方程(3-78)。颗粒相守恒方程为方程(3-73)和方程(3-75),或进一步写成

$$\frac{d n_{pk}}{dt_{pk}} = \frac{F_{pk}}{m_{pk}} + f_{pk,i}$$

$$\frac{dT_{pk}}{dt_{pk}} = \frac{1}{C_{pk} m_{pk}} (q_{gkc} + m_{pk} (\beta Q_c + C_p T - C_{pk} T_{pk}))$$

小滑移模型用预先划定的颗粒尺寸组来定义“组分”,颗粒直径变化时,一种“组分”可能变为另一种“组分”,颗粒相之间具有质量传递。颗粒轨道模型则不同,它用典型的单个颗粒代表按初始尺寸划分的经历着同样变化的颗粒群,颗粒群之间互不干扰,不存在

任何输运效应。因此方程(3-71)中的源项  $\Gamma_{pk}$  仅指  $k$  组颗粒的质量损失,即

$$\Gamma_{pk} = n_{pk} \dot{m}_{pk} \quad (3-113)$$

其中  $\dot{m}_{pk} = \frac{dm_{pk}}{dt_{pk}}$  为颗粒质量变化率。由于

$$\frac{\partial n_{pk} m_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_{pk} m_{pk} u_{pkj}) = m_{pk} \left( \frac{\partial n_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_{pk} u_{pkj}) \right) + n_{pk} \dot{m}_{pk}$$

将方程(3-71)代入

$$\frac{\partial n_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_{pk} u_{pkj}) = 0 \quad (3-114)$$

此为颗粒的数密度守恒方程。

忽略密度脉动和颗粒对气相脉动的影响,采用  $K-\varepsilon$  模型,气相守恒方程为方程(3-110)~方程(3-112)。若假设颗粒轨道仅与气体的平均速度有关,则颗粒瞬时量就是平均量

$$\frac{d\bar{u}_{pki}}{dt_{pk}} = \frac{\bar{F}_{pk}}{m_{pk}} + \bar{f}_{pk,i} \quad (3-115)$$

仅考虑 Stokes 力时

$$\frac{\bar{F}_{pk}}{m_{pk}} = \frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{pki}}{\bar{\tau}_{sk}}$$

该模型称为确定轨道模型<sup>[20,27]</sup>,它考虑了颗粒与气相间的滑移,但忽略了气相湍流脉动对颗粒运动的影响。

为了同时考虑滑移和湍流脉动对颗粒的影响,随机轨道模型<sup>[28]</sup>在瞬态流场中讨论颗粒运动,如图 3-13 所示。设旋涡内流场均匀,湍流各向同性,于是

$$(\overline{u_i'})^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2}{3} K \right)^{\frac{1}{2}}$$

其状态等于颗粒与该旋涡初始接触时流体的当时状态。若旋涡内的瞬时速度呈正态分布

$$\mathcal{P}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{2}{3} K \right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(u_i - \bar{u}_i)}{\frac{2}{3} K} \right]$$

有

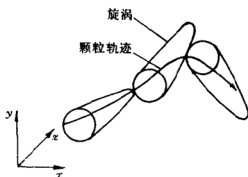


图 3-13 颗粒轨迹模型示意图

$$S(u_i) = \int_{-\infty}^{u_i} \mathcal{D}(u_i) du_i$$

其中  $0 \leq S(u_i) \leq 1$ , 当  $\bar{u}_i$  和  $K$  已知时, 通过随机选取的  $S$  可得到瞬时速度  $u_i$ 。其关系曲线如图 3-14 所示。

仅考虑 Stokes 力的颗粒运动瞬时方程和颗粒轨迹方程为

$$\frac{du_{pi}}{dt} = \frac{u_i - u_{pi}}{\tau_{st}} \quad (3-116)$$

$$\frac{dx_{pi}}{dt} = u_{pi} \quad (3-117)$$

设  $t=0$  时颗粒进入某旋涡, 接触的第一个气体质点为  $A$ , 如图 3-15 所示。此时,  $u_{pi} = u_{pio}$ ,  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta x$  表示颗粒与质点  $A$  的相对位移。由于旋涡内  $\bar{u}_i$  分布均匀, 故  $A$  点的位移就是旋涡的位移。当  $|\Delta x| \leq l_m$  时, 颗粒仍在旋涡内, 根据 Prandtl 湍流尺度假设 (2.2.2 节)。

$$l_m = C_p^{\frac{3}{4}} K^{\frac{3}{2}} / \epsilon$$

当  $\tau_{st}$  = 常数时, 方程 (3-116) 写成

$$\frac{d(u_i - u_{pi})}{u_i - u_{pi,t}} = - \frac{1}{\tau_{st}} dt$$

积分

$$\frac{|u_i - u_{pi}|}{|u_i - u_{pio}|} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_{st}}\right)$$

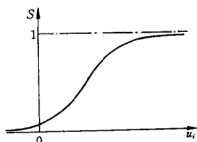
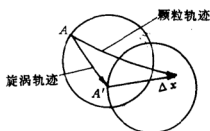
图 3-14  $u_i$  的随机选取曲线

图 3-15 颗粒穿越旋涡示意图

颗粒在旋涡中的相对位移方程为

$$\frac{d|\Delta x_i|}{dt} = |u_{pki} - u_i| = |u_i - u_{pki}| \exp\left(-\frac{t}{\tau_{sk}}\right)$$

积分

$$\int_0^t d|\Delta x_i| = \int_0^t |u_i - u_{pki}| e^{-\frac{t}{\tau_{sk}}} dt$$

其中  $t_R$  为颗粒穿越旋涡所需的时间。

整理后

$$t_R = -\tau_{sk} \ln\left(1 - \frac{l_m}{\tau_{sk}|u_i - u_{pki}|}\right)$$

当  $l_m > \tau_{sk}|u_i - u_{pki}|$  时, 方程无解, 此时颗粒失陷在旋涡中直至该旋涡消失。

旋涡寿命公式<sup>[28]</sup>为

$$t_r^* = l_m / \sqrt{u'^2} = \frac{l_m}{\left(\frac{2}{3}K\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} C_r^{\frac{3}{4}} k / \varepsilon \quad (3-118)$$

因此, 对方程(3-109)和方程(3-110)积分时, 步长  $\Delta t$  应取作

$$\Delta t = \begin{cases} t_r^* & l_m > \tau_{sk}|u_i - u_{pki}| \\ \min(t_r^*, t_i) & l_m < \tau_{sk}|u_i - u_{pki}| \end{cases} \quad (3-119)$$

综上所述, 随机轨道模型首先通过气相方程确定流场的平均速度  $\bar{u}$ , 湍流脉动  $K$  和  $\varepsilon$ , 然后根据随机数求旋涡内的瞬时参数和

颗粒的随机轨道。再求随机轨迹(千条以上)的平均值,其计算量是很大的。

颗粒轨道模型允许颗粒与气相之间存在显著差异,还可考虑气相湍流对颗粒运动的影响,因此得到广泛应用。

### 三、多流体模型<sup>[29,30]</sup>

如前所述,多相流取体积平均值后,各相互相渗透,共存于一个空间。其守恒方程为方程(3-71)~方程(3-79),是关于瞬时量的方程。讨论湍流时,需对 Reynolds 分解后产生的脉动相关量进行模化。均相模型和颗粒轨道模型避开了这一麻烦,却不能描述颗粒相的湍流扩散。

某些条件下,方程组可以简化,如  $M \ll 1$  时,忽略能量方程的耗散项,方程(3-71)~方程(3-79)可写成

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) &= - \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} \\
 \frac{\partial n_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{pk} u_{pkj}) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{pk} u_{pkj}}{\partial x_j} &= n_{pk} \dot{m}_{pk} \\
 \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - u_i \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} \\
 &\quad - \sum \frac{\rho_{pk}(u_i - u_{pki})}{\tau_{u_{pk}}} \\
 \frac{\partial n_{pk} u_{pki}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{pk} u_{pkj} u_{pki}) &= \frac{n_{pk}(u_i - u_{pki})}{\tau_{u_{pk}}} + u_i n_{pk} \dot{m}_{pk} / m_{pk} \\
 \frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j C_p T) &= \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} - \pi N u d_k \sum \frac{n_{pk}(T - T_{pk})}{m_{pk}} \\
 &\quad - C_p T \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} + \omega_c Q_c \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial t}(n_{pk} C_{pk} T_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n_{pk} u_{pkj} C_{pk} T_{pk}) \\
 &= n_{pk} \dot{m}_{pk} Q_c + \pi N u d_k n_{pk}(T - T_{pk}) / m_{pk} \\
 &\quad + (C_p T - C_{pk} T_{pk}) n_{pk} \dot{m}_{pk} / m_{pk}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_s) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j Y_s) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D\rho \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - \alpha_s \sum n_{ps} m_{ps} - \omega_s$$

Reynolds 分解后,忽略非正常关联项,两相交叉相关项和某些三阶相关量,并采用梯度模拟

$$\overline{u'_i u'_j} = -v_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

$$\overline{u'_i Y'_s} = -\frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{Y}_s}{\partial x_i}$$

$$\overline{u'_{pi} n'_{pj}} = -\frac{v_p}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial x_i}$$

$$\overline{n_{pi} u'_{pj} u'_{pkj}} = -\bar{n}_{pj} v_p \left( \frac{\partial \bar{u}_{pi}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \right)$$

$$\overline{u_{pi} n'_{pj} T'_{pj}} + \overline{n_{pi} u'_{pj} T'_{pj}} = -\bar{n}_{pj} \frac{v_p}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

于是

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_j) = \Gamma_{eff} \quad (3-120)$$

$$\frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{n}_{pj} \bar{u}_{pj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_p}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial x_j} \right) \quad (3-121)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{pj}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_{pj} \bar{u}_{pj}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( m_{pj} \frac{v_p}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial x_j} \right) + \Gamma_{pj,eff} \quad (3-122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{eff} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ & + \bar{u}_i \Gamma_{eff} - \sum \frac{\bar{\rho}_{pj}(\bar{u}_i - \bar{u}_{pi})}{\tau_a} \end{aligned} \quad (3-123)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}_{pj} \bar{u}_{pi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{n}_{pj} \bar{u}_{pj} \bar{u}_{pi}) = & \frac{\bar{n}_{pj}(\bar{u}_i - \bar{u}_{pi})}{\tau_a} + \frac{\bar{u}_i \Gamma_{pj,eff}}{m_{pj}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_p \bar{n}_{pj} \left( \frac{\partial \bar{u}_{pi}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \right) + \frac{v_p}{\sigma_p} \left( \bar{u}_{pj} \frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial x_i} + \bar{u}_{pi} \frac{\partial \bar{n}_{pj}}{\partial x_j} \right) \right) \end{aligned} \quad (3-124)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}C_i\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j C_i \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} k_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \pi N u k d_k \sum \frac{\bar{n}_{pk}(\bar{T} - \bar{T}_{pk})}{m_{pk}} + C_i \bar{T} \Gamma_{eff} + \bar{\omega}_s Q_s \quad (3-125)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{n}_{pk} C_{pk} \bar{T}_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{n}_{pk} \bar{u}_{pkj} C_{pk} \bar{T}_{pk}) = \Gamma_{eff} Q_c + \frac{\pi N u k d_k \bar{n}_{pk}(\bar{T} - \bar{T}_{pk})}{m_{pk}} + (C_i \bar{T} - C_{pk} \bar{T}_{pk}) \Gamma_{pk,eff} \quad (3-126)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{Y}_s) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{Y}_s) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} D_{eff} \frac{\partial \bar{Y}_s}{\partial x_j} \right) + \alpha_s \Gamma_{eff} - \bar{\omega}_s \quad (3-127)$$

其中  $D_{eff} = D + \frac{v_T}{\sigma_p}$ ,  $k_{eff} = k + \frac{v_T}{\sigma_r}$ ,  $\Gamma_{eff} = - \sum \Gamma_{pk,eff}$ ,  $\Gamma_{pk,eff} = \bar{\Gamma}_{pk} + \bar{\Gamma}'_{pk}$ ,  $\bar{\Gamma}_{pk} = \bar{n}_{pk} \bar{m}_{pk}$ ,  $\bar{\Gamma}'_{pk} = \bar{n}'_{pk} \bar{m}'_{pk}$ ,  $\sigma_r, \sigma_p$  和  $\sigma_r$  为常数。

参照 2.2.2 节, 气相  $K$  方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{eff} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + \mu_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + G_p + G_r \quad (3-128)$$

其中  $G_p = - \sum_k \frac{m_{pk}}{\tau_{pk}} (\bar{n}_{pk} \bar{u}_i (\bar{u}_i - \bar{u}_{pki}) - \bar{n}_{pk} \bar{u}_i (\bar{u}_i - \bar{u}_{pki}))$ , 反映了颗粒湍流与流体湍流的相互作用对流体湍能  $K$  的影响。

$G_r = \bar{u}_i \bar{\Gamma}' u'_i$ , 反映了两相间的质量传递对流体湍能  $K$  的影响。

将  $G_r$  展开

$$G_r = - \sum_k \frac{m_{pk}}{\tau_{pk}} (\bar{n}_{pk} \overline{u'_i (u'_i - u'_{pki})} + \bar{u}_i \overline{n'_{pk} (u'_i - u'_{pki})} + \overline{n'_{pk} u'_i (u'_i - u'_{pki})} + \overline{n'_{pk} u'_i (\bar{u}_i - \bar{u}_{pki})})$$

忽略三阶相关量和  $\overline{n'_{pk} u'_i}$

$$G_r = - \sum_k \frac{m_{pk}}{\tau_{pk}} \left( \frac{\bar{n}_{pk}}{2} K - \bar{n}_{pk} \overline{u'_i u'_{pki}} + \bar{u}_i \frac{v_p}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial x_i} \right)$$

根据量纲分析

$$\overline{u'_i u'_{pki}} = 2C_k (K K_{pk}^{\frac{1}{2}})$$

其中  $K_{pk}$  为颗粒相湍能,  $C_k$  为常数。故

$$G_r = - \sum_k \frac{m_{pk}}{\tau_{sk}} \left( 2\bar{n}_{pk}(K - C_r \sqrt{KK_{pk}}) + \bar{u}_i \frac{v_r}{\sigma_r} \frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial x_i} \right) \quad (3-129)$$

$K_{pk}$  和  $v_r$  与颗粒湍流模型有关, 若采用简单的代数模型, 认为颗粒追随当地流体的湍流脉动, 有 Hinze-Tchen 公式

$$\frac{v_r}{v_T} = \left( 1 + \frac{\tau_{sk}}{t_r^*} \right)^{-1} \quad (3-130)$$

其中  $t_r^*$  为旋涡寿命。根据各向同性湍流理论

$$\frac{K_{pk}}{K} = \frac{v_r}{v_T} \quad (3-131)$$

或者直接导出  $K_{pk}$  方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_{pk} K_{pk}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_{pk} \bar{u}_{pkj} K_{pk}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_r}{\sigma_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_{pk} K_{pk} \right) + P_k + P_{kf} \quad (3-132)$$

其中

$$\begin{aligned} P_k &= \left( v_r \bar{\rho}_{pk} \left( \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \right) + \bar{u}_{pkj} \frac{v_r}{\sigma_r} m_{pk} \frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{k2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{u}_{pkj} v_r \bar{\rho}_{pk} \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{k2} \frac{\partial}{\partial t} \left( v_r \bar{\rho}_{pk} \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \right) + \frac{v_r}{\sigma_r} m_{pk} \frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial t} \\ P_{kf} &= \frac{m_{pk}}{\tau_{sk}} \left( 2\bar{n}_{pk} (C_{k1} \sqrt{KK_{pk}} - K_{pk}) - \frac{v_r}{\sigma_r} \frac{\partial \bar{n}_{pk}}{\partial x_i} (\bar{u}_i - \bar{u}_{pkj}) \right. \\ &\quad \left. - C_{k2} v_r n_{pk} \frac{\partial \bar{u}_{pkj}}{\partial x_i} \left[ C_{k1} \sqrt{\frac{K}{K_{pk}}} - 1 \right] \right) \end{aligned}$$

$P_k$  与  $P_{kf}$  分别表示颗粒湍流和相间作用导致的  $K_{pk}$  变化。将  $G_r$  展开

$$\begin{aligned} G_r &= - \sum (\bar{u}_i \bar{n}_{pk} \overline{u'_i m'_{pk}} + \bar{u}_i \bar{m}_{pk} \overline{u'_i n'_{pk}} + \bar{u}_i \overline{u'_i n'_{pk} m'_{pk}} \\ &\quad + \bar{n}_{pk} \bar{m}_{pk} \overline{u_i'^2} + \bar{n}_{pk} \overline{m'_{pk} u_i'^2} + \bar{m}_{pk} \overline{u_i'^2 n'_{pk}} + \overline{u_i'^2 n'_{pk} m'_{pk}}) \end{aligned}$$

忽略其中关联较弱的项, 如  $\overline{u'_i m'_{pk}}$ ,  $\overline{u'_i n'_{pk}}$ ,  $\overline{u'_i n'_{pk} m'_{pk}}$  等, 有



$$G_p = C_p K \Gamma_{eff} \quad (3-133)$$

其中  $C_p$  为常数。 $\overline{\Gamma_p} = \overline{n'_p m'_p}$  表示湍流对颗粒消耗的影响。对于液滴蒸发,  $m_p \propto (T - T_p)$ , 当液滴温度  $T_p = \text{常数}$  时

$$\overline{n'_p m'_p} \propto \overline{n'_p T}$$

采用梯度模拟

$$\overline{n'_p m'_p} = C_{m1} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{n}_p}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \pi d_k N u \frac{k}{C_p} \quad (3-134)$$

对于颗粒燃烧,  $m_p \propto Y_{ox}$ , 故

$$\overline{n'_p m'_p} \propto \overline{n'_p Y_{ox}}$$

采用梯度模拟

$$\overline{n'_p m'_p} = C_{m2} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{n}_p}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{Y}_{ox}}{\partial x_j} \pi d_k \frac{\mu}{P_r} \quad (3-135)$$

如果气体的  $\varepsilon$  方程仍采用(2-29)式, 根据  $K$  和  $\varepsilon$  可求得  $v_T$

$$v_T = C_s \frac{K^2}{\varepsilon}$$

综上所述, 方程(3-120)~方程(3-129), 方程(2-29), 方程(3-133), 方程(3-134)或方程(3-135), 方程(3-132)或方程(3-130)和方程(3-131)为封闭方程组可用于讨论两相湍流燃烧。

## 第四章 液滴燃烧

根据液滴燃烧的古典模型(或称  $d^2$  定律模型)可建立一组反映该过程基本特征的守恒方程,再通过 Shvab—Zeldovich 变换,求得方程的解析解,用以描述燃烧时液滴外部流场的结构、火焰位置和液滴直径的变化。该模型偏于简单,是一种理想模型,而实际情形要复杂得多。为此,人们从不同的方面对其改进与推广,从定常到非定常,单组元到多组元,静止环境到对流环境,普通状态到临界状态,使液滴燃烧的理论不断丰富与深入。

本章内容包括:气体中的组分扩散,这是古典模型涉及的基本理论;液滴蒸发的古典模型;液滴燃烧的古典模型;古典模型的修正,包括瞬态非定常过程,多组元液滴,对流效应和超临界燃烧。

### 4.1 扩散

#### 4.1.1 摩尔流率

设多组元的均相混合物中,第  $k$  种组分在  $i$  方向上的速度为  $u_{ki}$ ,混合物在此方向上的宏观速度  $u_i^0$  应为各  $u_{ki}$  的加权平均值,上标“0”表示加权方式。不同的加权方式可使宏观速度具有不同的定义。

以摩尔分数  $X_k$  为权,有

$$u_i^M = \sum_k X_k u_{ki} = \sum_k \frac{n_k}{n} u_{ki} \quad (4-1)$$

称为摩尔平均速度,其中  $n_k$  表示组分  $k$  的摩尔浓度,  $\sum X_k = 1$ 。

以质量分数  $Y_i$  为权, 有

$$u_i^m = \sum_k Y_k u_{ki} = \sum_k \frac{C_k}{\rho} n_{ki} \quad (4-2)$$

称为质量平均速度, 其中  $C_k$  表示组分  $k$  的质量浓度,  $\sum_k Y_k = 1$ 。

以体积分数  $n_k V_k$  为权, 有

$$u_i^V = \sum_k n_k V_k u_{ki} \quad (4-3)$$

称为体积平均速度, 其中  $V_k$  为组分  $k$  的偏摩尔体积,  $\sum_k n_k V_k = 1$ 。

单位时间流过单位面积的  $k$  组分的摩尔数称为此组分的摩尔流率, 记作  $I_k$ , 在  $i$  方向上

$$I_{ki} = n_k u_{ki} = n_k (u_{ki} - u_i^0) + n_k u_i^0 \quad (4-4)$$

此式说明  $k$  组分的摩尔流率由两项组成, 第一项  $J_{ki} = n_k (u_{ki} - u_i^0)$  表示组分  $k$  与混合流体的速度差导致的质量传递, 脚标 0 表示加权方式。第二项为宏观流动导致的质量传递。

## 4.1.2 Fick 定律

Fick<sup>[1]</sup> 根据 Graham 的实验结果得到扩散流率的数学表达式

$${}_v J_{ki} = - D_k \frac{dn_i}{dx_i} \quad (4-5)$$

即扩散流率与浓度梯度成正比, 方向为浓度降低的方向。其中  $D_k$  为组分  $k$  的扩散系数。写成三维矢量形式

$${}_v J_k = - D_k \nabla n_k \quad (4-6)$$

称为 Fick 定律。不同定义的扩散流率之间具有一定的转换关系, 以双组分体系为例,  $\alpha$  为权时

$$u_i^{\alpha} = \alpha_1 u_{1i} + \alpha_2 u_{2i}$$

$${}_v J_{1i} = n_1 (u_{1i} - u_i^{\alpha}) = n_1 ((1 - \alpha_1) u_{1i} - \alpha_2 u_{2i})$$

由于  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , 故

$$\frac{{}_v J_{1i}}{\alpha_2} = \frac{{}_v J_{1i}}{1 - \alpha_1} = n_1 (u_{1i} - u_{2i})$$

同样,以  $b$  为权

$$\frac{{}_b J_{1i}}{1 - b_1} = n_1(u_{1i} - u_{2i})$$

因此

$$\frac{{}_s J_{1i}}{1 - a_1} = \frac{{}_b J_{1i}}{1 - b_1}$$

当  $a_i = X_i, b_i = n_i V_i$  时

$${}_M J_1 = \frac{X_2}{n_2 V_2} \quad {}_s J_1$$

代入式(4-6)

$${}_M J_1 = - \frac{X_2 D_1}{n_2 V_2} \nabla n_1$$

由于  $\frac{1}{n} = \frac{X_2}{n_2}$

$${}_M J_1 = - \frac{D_1}{n_2 V_2} \nabla n_1 \quad (4-7)$$

由于  $V = \sum V_i N_i, N_i$  为组分  $k$  的摩尔数

$$\frac{1}{n} = \frac{V}{N} = \sum V_i X_i$$

微分上式

$$d\left(\frac{1}{n}\right) = \sum V_i dX_i + \sum X_i dV_i$$

根据 Gibbs—Duhem 方程<sup>[2]</sup>  $\sum X_i dV_i = 0$  或  $\sum n_i dV_i = 0$

故

$$d\left(\frac{1}{n}\right) = \sum V_i dX_i$$

双组分体系

$$d\left(\frac{1}{n}\right) = V_1 dX_1 + V_2 dX_2 = (V_1 - V_2) dX_2$$

即

$$\frac{dn}{dX_1} = n^2(V_2 - V_1)$$

因为  $nX_i = n_i$

$$\frac{dn_1}{dX_1} = n + X_1 \frac{dn}{dX_1}$$

代入上式得

$$\frac{dn_1}{dX_1} = n(1 + nX_1(V_2 - V_1))$$

由于  $n_1V_1 + n_2V_2 = 1$ , 故

$$\nabla n_1 = n^2V_2 \nabla X_1$$

代入(4-6)式得

$${}_mJ_1 = -nD_1 \nabla X_1 \quad (4-8)$$

同样,  $b_i = Y_i$  时

$${}_mJ_1 = -nD_1 \frac{Y_2}{X_2} \nabla X_1 \quad (4-9)$$

因为

$$X_1 = \frac{\frac{m_1}{\bar{W}_1}}{\frac{m_1}{\bar{W}_1} + \frac{m_2}{\bar{W}_2}} = \frac{\bar{W}Y_1}{\bar{W}}$$

其中  $m_1$  和  $m_2$  为组分 1 和组分 2 的质量,  $\bar{W}_1$  和  $\bar{W}_2$  为相应的分子量,  $\bar{W}$  为折合分子量, 有  $\frac{1}{\bar{W}} = \frac{Y_1}{\bar{W}_1} + \frac{Y_2}{\bar{W}_2}$ , 显然  $n\bar{W} = \rho$ 。

故 
$$\nabla X_1 = \frac{Y_1}{\bar{W}_1} \nabla \bar{W} + \frac{\bar{W}}{\bar{W}_1} \nabla Y_1$$

因为 
$$\nabla \bar{W} = \left( \frac{1}{\bar{W}_1} - \frac{1}{\bar{W}_2} \right) (-\bar{W}^2) \nabla Y_1$$

故 
$$\nabla X_1 = \frac{\bar{W}^2}{\bar{W}_1\bar{W}_2} \nabla Y_1$$

将此式代入(4-7)式得

$${}_mJ_1 = -\rho D_1 \frac{1}{\bar{W}_1} \nabla Y_1$$

即

$${}_mJ_1 = -\rho D_1 \nabla Y_1$$

其中  ${}_mJ_1 = W_1$   ${}_mJ_1$  为组分 1 的质量扩散流率。

综上所述, Fick 定律通常可写成

$${}_1J_1 = -D_1 \nabla n_1$$

$${}_mJ_1 = -n_1 D_1 \nabla X_1$$

$${}_n J_1 = -\rho D_1 \nabla Y_1$$

可以证明  $D_1 = D_2$ , 即双组分体系仅存在一个扩散系数  $D$ 。

因为

$$u_i^r = n_1 V_1 u_{1i} + n_2 V_2 u_{2i}$$

$$n_1 V_1 u_i^r + n_2 V_2 u_i^r = u_i^r$$

即

$$V_1 D_1 \nabla n_1 + V_2 D_2 \nabla n_2 = 0 \quad (4-10)$$

由于

$$n_1 \nabla V_1 + n_2 \nabla V_2 = 0$$

$$\nabla n_1 V_1 + \nabla n_2 V_2 = 0$$

故

$$D_1 V_1 \nabla n_1 + D_1 V_2 \nabla n_2 = 0 \quad (4-11)$$

比较(4-10)式与(4-11)式有

$$D_1 = D_2$$

对于完全气体,  $V_i = \frac{RT}{p} = \frac{1}{n}$ , 故

$${}_n J_i = -{}_n j_i \quad (4-12)$$

### 4.1.3 气体中的扩散系数<sup>[2]</sup>

设坐标原点处一平面微元  $A$ ,  $z$  轴为其法向。若分子数密度  $\bar{n}$  仅沿  $z$  轴变化, 且  $\frac{\partial \bar{n}}{\partial z}$  = 常数, 记原点处为  $\bar{n}_0$ , 可推得分子与平面  $A$  的上、下表面的碰撞频率分别为

$$Z_u = \frac{\bar{n}_0}{4} \bar{v} + l \frac{\partial \bar{n}}{\partial z} \frac{\bar{v}}{6}$$

$$Z_l = \frac{\bar{n}_0}{4} \bar{v} - l \frac{\partial \bar{n}}{\partial z} \frac{\bar{v}}{6}$$

其中  $\bar{v}$  为分子平均运动速度,  $l$  为分子平均自由程, 脚标  $u$  和  $l$  分别表示上、下表面。

因此,  $A$  平面的分子扩散流率

$$J = \frac{1}{A_e} (Z_l - Z_u) = -\frac{1}{3} \bar{v} \frac{\partial n}{\partial z}$$

其中  $A_e$  为阿伏加德罗常数,  $\bar{n} = A_e n$ 。

根据 Fick 定律

$$J = -D \frac{\partial n}{\partial z}$$

故 
$$D = \frac{l}{3} \bar{v}$$

即 
$$D = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma^2 \bar{n}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

其中  $k = 1.38 \times 10^{-6} \text{gcm}^3/\text{s}^2$ ;  $k$  为玻耳兹曼常数;  $m$  为分子质量,  $\sigma$  为分子直径。

对于完全气体  $\bar{n} = \frac{p}{kT}$ , 故

$$D = \frac{2}{3} \left( \frac{k^3}{\pi^3 m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{p \sigma^2}$$

双组分扩散时, 引进碰撞距离  $\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}$  和折合质量  $\bar{m} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

$$D_{AB} = \frac{2}{3} \left( \frac{kT}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\bar{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\sigma_{AB}} \right)^2 \frac{1}{p}$$

当  $p$  为大气压,  $\sigma$  为  $10^{-10} \text{m}$ ,  $T$  为  $K$ ,  $\bar{W}$  为  $\text{g/mol}$  时

$$D_{AB} = \frac{1.86 \times 10^{-3} T^{\frac{3}{2}}}{p \sigma_{AB}^2 (\bar{W})^{\frac{1}{2}}} \quad (4-13)$$

球形无极分子周围, 力场的势是球心对称的, 记作  $\varphi(r)^{[3]}$ , 分子间的相互作用力  $F(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$ 。对于刚球模型, 其势函数写成

$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ 0 & r > \sigma \end{cases}$$

它忽略了分子碰撞前的相互作用。实际上, 势函数的图像应如图 4-1 所示, 分子间距离  $r < r_e$  时, 作用力为斥力;  $r > r_0$  时, 为引力;  $r = r_0$  时作用力为零。Lennard-Jones 6~12 模型给出的势函数为

$$\varphi(r) = 4\varepsilon \left\{ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right\}$$

其中  $\varepsilon$  表示势阱深度,  $\left( \frac{\sigma}{r} \right)^6$  称为引力势,  $r$  较大时起主导作用,  $\left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12}$  为斥力势,  $r$  较小时起主导作用。

利用势函数, Chapman-Enskog<sup>[4]</sup>推得

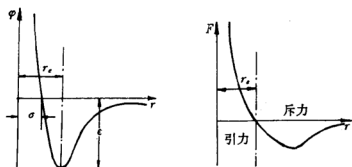


图 4-1 分子间的势函数和相互作用力

$$D = \frac{1}{3} \frac{\bar{v}^2}{4 \sqrt{2} \bar{n} \Omega}$$

其中  $\Omega$  为碰撞积分, 其值与势函数有关。刚球模型  $\Omega_0 = \frac{\pi \sigma^2 \bar{v}}{4}$ , 于是

$$D = \frac{D_{\text{rigid}} \Omega_0}{\Omega} = \frac{D_{\text{rigid}}}{\Omega^*}$$

其中  $D_{\text{rigid}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \sigma^2 \bar{n}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$ ,  $\Omega^* = \Omega / \Omega_0$  是折合温度  $T^* = \frac{T}{\bar{T}}$  的函数,  $\bar{T} = \frac{\epsilon}{k}$  称为特征温度。Hirschfelder 将  $\Omega^*(T^*)$  制成数据表以供查阅<sup>[3]</sup>, Lennard-Jones 6~12 模型的两个特征参数  $\sigma$  和  $\epsilon$  亦可从表中查得<sup>[3]</sup>。

当  $p$  为大气压,  $\sigma$  为  $10^{-10}m$ ,  $T$  为 K,  $\bar{W}$  为 g/mol 时

$$D_{AB} = \frac{1.86 \times 10^{-3} T^{\frac{3}{2}}}{p \sigma_{AB}^2 (\bar{W})^{\frac{1}{2}} \Omega^*} \quad (4-14)$$

## 4.2 液滴蒸发

### 4.2.1 液滴蒸发模型

为描述单个液滴在静止气体中的蒸发, 假设



(1) 忽略自然对流和强迫对流的影响, 流场是球对称的, 对称中心为球形液滴中心。

(2) 气相质量扩散系数  $D$  与液滴蒸发常数  $K$  之比大致等于两相密度之比, 即  $\frac{D_g}{K} \sim \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_g}$ , 当  $\bar{\rho}_l \gg \rho_g$  时, 可假定气相流场定常。

(3) 气体不溶于液滴。

(4) 液滴仅含一种组分, 其内部温度均匀且为常数, 表面处两相平衡。

球坐标中, 气相的质量和组元守恒方程为

$$\frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (4-15)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dY_i}{dr} \right) = r^2 \rho v \frac{dY_i}{dr} \quad (4-16)$$

其中  $r$  表示球坐标,  $v$  为法向速度, 若用脚标 1、2 分别表示液体蒸气和气体组分

$$v = Y_1 v_1 + Y_2 v_2$$

由于气体不溶于液体, 故  $v_{2s} = 0$

脚标  $s$  表示液滴表面。于是

$$v_s = Y_{1s} v_{1s}$$

$$\text{或} \quad \rho_s v_s = C_{1s} v_{1s} \quad (4-17)$$

$C$  为浓度。由 (4-4) 式和 (4-5) 式得

$$C_{1s} v_{1s} = - \rho_s D_s \left( \frac{dY_1}{dr} \right)_s + \rho_s Y_{1s} v_s$$

代入 (4-17) 式得

$$\rho_s v_s = - \rho_s D_s \left( \frac{dY_1}{dr} \right)_s + \rho_s Y_{1s} v_s \quad (4-18)$$

该式说明混合气体离开液滴表面的流率包括两部分: 右端第一项表示扩散造成的质量传递, 第二项表示液滴界面宏观流动造成的质量传递。

由 (4-15) 式可得  $r^2 \rho v = r_s^2 \rho_s v_s = \text{常数}$

$$\text{故} \quad v = \frac{r_s^2 \rho_s v_s}{r^2 \rho} \neq 0$$

称这种静止气体中因液滴蒸发而出现宏观流动为 Stefan 流。

令  $b = \frac{Y_1}{Y_{1s} - 1}$  代入 (4-16) 式和 (4-18) 式得

$$r^2 \rho v \frac{db}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{db}{dr} \right) \quad (4-19)$$

$$v_k = D \left( \frac{db}{dr} \right)_s \quad (4-20)$$

当  $r \rightarrow \infty$  时

$$Y_1 = Y_{1\infty}$$

即

$$b = b_{\infty} = \frac{Y_{1\infty}}{Y_{1s} - 1} \quad (4-21)$$

积分 (4-19) 式, 可得

$$r_s^2 \rho_s v_s (b - b_s + 1) = r^2 D \rho \frac{db}{dr}$$

若令  $\rho D = \rho_s D_s = \text{常数}$

$$\frac{r_s^2 v_s}{r D_s} = \ln \frac{b_r - b_s + 1}{b - b_s + 1}$$

当  $r = r_s$  时

$$\frac{r_s v_s}{D_s} = \ln(b_{\infty} - b_s + 1)$$

令  $B_M = b_{\infty} - b_s$ , 称为 Spalding 传递系数

$$v_s = \frac{D_s \ln(1 + B_M)}{r_s} \quad (4-22)$$

## 4.2.2 $d^2$ 定律

记单位表面的液滴蒸发率为  $G$ , 有  $G = \rho_s v_s = \rho_s D_s \frac{\ln(1 + B_M)}{r_s} =$

$\frac{\dot{m}}{4\pi r_s^2}$ , 其中  $\dot{m} = -4\pi r_s^2 \rho_s \frac{dr_s}{dt}$  为液滴消耗率, 因此

$$\dot{m} = 4\pi r_s \rho_s D_s \ln(1 + B_M) \quad (4-23)$$

或

$$\frac{d(d^2)}{dt} = -K$$

其中  $d$  为液滴直径,  $K = \frac{8\rho_i D_i}{\rho_l} (1 + B_M)$  为蒸发常数。

$$\text{积分上式} \quad d^2 = d_0^2 - Kt \quad (4-24)$$

其中  $d_0$  为液滴初始直径。该式称为  $d^2$  定律。

记  $d=0$  时  $t=t_r$ , 为液滴蒸发时间

$$t_r = \frac{\bar{\rho}_l d_0^2}{8\rho_i D_i \ln(1 + B_M)}$$

显然, 液滴愈大, 液滴密度愈大, 蒸发时间愈长。方程(4-24)还可写成

$$d^2 = d_0^2 \left( 1 - \frac{t}{t_r} \right)$$

### 4.2.3 温度分布

液滴蒸发的能量守恒方程为

$$r^2 \rho v C_r \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \quad (4-25)$$

其边界条件为

$$r = \infty \text{ 时} \quad T = T_\infty (\text{环境温度}) \quad (4-26)$$

$$r = r_s \text{ 时} \quad T = T_s$$

$$k \left( \frac{dT}{dr} \right)_s = \rho_s v_s L_v \quad (4-27)$$

其中  $L_v$  表示温度为  $T_s$  时液滴的气化潜热。

积分(4-25)式得

$$\frac{r^2 \rho v C_r}{kr} = \ln \frac{T_\infty - T_s + \frac{L_v}{C_r}}{T - T_s + \frac{L_v}{C_r}}$$

或

$$\frac{r_i^2 v_i}{r a_i} = \ln \frac{T_\infty - T_s + \frac{L_v}{C_r}}{T - T_s + \frac{L_v}{C_r}} \quad (4-28)$$

其中  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  为热扩散系数。

$$\text{当 } r = r_s \text{ 时} \quad v_s = \alpha_s \frac{\ln(1 + B_T)}{T_s} \quad (4-29)$$

$$\text{其中} \quad B_T = \frac{C_p(T_\infty - T_k)}{L_v} \quad (4-30)$$

比较(4-22)式和(4-29)式可得

$$L_v \ln(1 + B_M) = \ln(1 + B_T)$$

其中  $L_v$  称为 Lewis 数。当  $L_v = 1$  时

$$\frac{C_p(T_\infty - T_k)}{L_v} = \frac{Y_{1\infty} - Y_{1k}}{Y_{1k} - 1} \quad (4-31)$$

#### 4. 2. 4 Clausius—Clapeyron 方程<sup>[2]</sup>

恒温恒压下, 相平衡状态时

$$G_A = G_B$$

其中  $G$  为 Gibbs 自由焓, 脚标  $A, B$  表示不同的相。根据热力学关系式  $dG = vdp - sdT$ , 其中  $v$  为比容,  $s$  为熵, 于是

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_A - s_B}{v_A - v_B}$$

平衡体系

$$s_A - s_B = \frac{L_v}{T}$$

故

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L_v}{T(v_A - v_B)}$$

对于气液系统, 若脚标  $A$  表示气相,  $B$  表示液相, 由于  $v_A \gg v_B$ ,  $pv_A = \frac{R}{W}T$ , 故

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{WL_v}{RT^2} \quad (4-32)$$

该式称为 Clausius—Clapeyron 方程, 其中  $W$  为分子量。

设液体蒸气在气相的分压为  $p_1$ , 上式写成

$$\frac{d \ln p_1}{dT} = \frac{W_p L_v}{RT^2}$$

$$\text{积分} \quad \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{W_f L_v}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s} \right) \quad (4-33)$$

其中脚标“0”表示某种参照值,当  $p_0 = 101\text{kPa}$  时,  $T_0$  为液体沸点。

根据 Dalton 分压定律

$$\left( \frac{p_1}{p} \right) = X_{1s} = Y_{1s} \frac{\bar{W}}{\bar{W}_f} \quad (4-34)$$

由(4-33)式和(4-34)式得

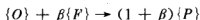
$$Y_{1s} = \frac{W_f}{\bar{W}} \frac{p_0}{p} \exp \left\{ \frac{W_f L_v}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s} \right) \right\} \quad (4-35)$$

由(4-31)式和(4-35)式可求得  $Y_{1s}$  和  $T_s$ 。 $T_s$  称为湿球温度。

### 4.3 液滴燃烧

#### 4.3.1 Shvab—Zeldovich 变换

液滴蒸发后,若蒸气和其它气体组分发生化学反应,基于质量的反应计量方程为



其中  $O, F, P$  分别表示氧化剂、气化燃料和产物,  $\beta$  为计量系数。

定常情况下,组元守恒方程为

$$r^2 \rho v \frac{dY_f}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dY_f}{dr} \right) - r^2 \omega_f \quad (4-36)$$

$$r^2 \rho v \frac{dY_o}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dY_o}{dr} \right) - \frac{r^2}{\beta} \omega_f \quad (4-37)$$

当  $L_v = 1$  时,能量守恒方程为

$$r^2 \rho v C_p \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dC_p T}{dr} \right) + r^2 \omega_f Q_f \quad (4-38)$$

对上述方程进行 Shvab—Zeldovich 变换,即引进耦合变量

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{Y_f}{\beta} - Y_o \\ C_p T + Y_f Q_f \\ C_p T + \beta Y_o Q_f \end{cases}$$

于是 
$$r^2 \rho v \frac{dZ}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dZ}{dr} \right) \quad (4-39)$$

设液滴表面不发生化学反应, 由(4-18)式

$$\left( \frac{dY_F}{dr} \right)_s = - \frac{v_s}{D_s} (1 - Y_{FS})$$

由于 
$$C_{os} v_{os} = - \rho_s D_s \left( \frac{dY_0}{dr} \right)_s + C_{os} v_s$$

$$v_{os} = 0$$

故 
$$\left( \frac{dY_0}{dr} \right)_s = \frac{v_s Y_{os}}{D_s}$$

于是

$$\left( \frac{dZ_1}{dr} \right)_s = \frac{v_s}{D_s} \left( \frac{1}{\beta} (Y_{FS} - 1) - Y_{os} \right) \quad (4-40)$$

由(4-27)式可得

$$\left( \frac{dZ_2}{dr} \right)_s = \frac{v_s}{D_s} (L_v + (Y_{FS} - 1) Q_F) \quad (4-41)$$

$$\left( \frac{dZ_3}{dr} \right)_s = \frac{v_s}{D_s} (L_v + \beta Y_{os} Q_F) \quad (4-42)$$

引进新变量

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Z_1}{\frac{1}{\beta} (Y_{FS} - 1) - Y_{os}} \\ \frac{Z_2}{L_v + (Y_{FS} - 1) Q_F} \\ \frac{Z_3}{L_v + \beta Y_{os} Q_F} \end{Bmatrix}$$

有 
$$r^2 \rho v \frac{db}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{db}{dr} \right)$$

当  $r = r_s$  时 
$$\left( \frac{db}{dr} \right)_s = \frac{v_s}{D_s}$$

$r = \infty$  时 
$$b = b_{\infty}$$

该方程与(4-19)式形式相同, 边界条件相同, 故

$$\frac{r_s^2 v_s}{r D_s} = \ln \frac{b_\infty - b_s + 1}{b - b_s + 1}$$

$$v_s = \frac{D_s}{r_s} \ln(1 + B) \quad (4-43)$$

其中  $B = b_\infty - b_s$

如果假设  $Y_{0s} = Y_{\infty} = 0$

$$B = \frac{Y_{FS} + \beta Y_{0\infty}}{1 - Y_{FS}} = \frac{C_p(T_\infty - T_s) - Y_{FS}Q_F}{L_F + (Y_{FS} - 1)Q_F}$$

$$= \frac{C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty}Q_F}{L_F} \quad (4-44)$$

$B$  为 Spalding 传递系数, 表示传给液滴的能量与液滴消耗能量的比。由于燃烧提供的能量远大于传导失去的热量, 简化起见, 取  $T_i = T_b$ ,  $T_b$  为液滴沸点。参照 4.2.2 节, 对于燃烧液滴, 有

$$\frac{dr_s}{dt} = \frac{\rho_s D_s}{\rho_l r_s} \ln(1 + B) \quad (4-45)$$

和

$$d^2 = d_0^2 \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)$$

其中  $t_k = \frac{d_0^2}{K}$  为蒸发时间,  $K = \frac{8\rho_s D_s}{\rho_l} \ln(1 + B)$  为蒸发常数, 该值与输运系数  $\rho D$  或  $\frac{k}{C_p}$  成正比。

### 4.3.2 瞬时反应模型<sup>[5]</sup>

气相流场的细节与化学反应速率有关, 最简单的反应模型为瞬时反应模型, 它假定反应在火焰间断面上瞬时完成。流场被其分为两部分: 内区和外区, 分别记作 (I) 和 (II), 如图 4-2 所示。内区仅含燃料蒸气和燃烧产物, 而外区仅含氧化性气体和燃烧产

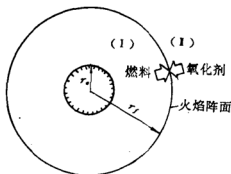


图 4-2 液滴燃烧的瞬时反应模型

物。

火焰阵面上(用脚标  $f$  表示)满足如下耦合条件

$$\left( \rho D \frac{dY_f}{dr} \right)_f = -\beta \left( \rho D \frac{dY_0}{dr} \right)_f \quad (4-46)$$

$$(Y_f)_f = (Y_0)_f = 0 \quad (4-47)$$

$$\left( k \frac{dT}{dr} \right)_{f,1} - \left( k \frac{dT}{dr} \right)_{f,1} = -Q_f \left( \rho D \frac{dY_f}{dr} \right)_f \quad (4-48)$$

气相组元守恒方程为

$$r^2 \rho v \frac{dY_f}{dr} - \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dY_f}{dr} \right) = 0 \quad (\text{内区}) \quad r_s \leq r \leq r_f \quad (4-49)$$

$$r^2 \rho v \frac{dY_0}{dr} - \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho D \frac{dY_0}{dr} \right) = 0 \quad (\text{外区}) \quad r_f \leq r < \infty \quad (4-50)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} r = r_s \text{ 时} \quad & Y_f = Y_{fs} \\ r = r_f \text{ 时} \quad & \left( \rho D \frac{dY_f}{dr} \right)_f = -\beta \left( \rho D \frac{dY_0}{dr} \right)_f \quad Y_f = Y_0 = 0 \end{aligned} \quad (4-51)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad Y_0 = Y_{0\infty}$$

对于内区,积分(4-49)式

$$r^2 \rho v Y_f - r^2 \rho D \frac{dY_f}{dr} = r_s^2 \rho_s v_s Y_{fs} - r_s^2 \rho_s D_s \left( \frac{dY_f}{dr} \right)_s$$

由(4-18)式,上式可写成

$$\dot{m} Y_f - 4\pi \rho D r^2 \frac{dY_f}{dr} = \dot{m} \quad (4-52)$$

其中  $\dot{m} = 4\pi \rho_s v_s r_s^2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\pi}{6} d_s^3 \rho_t \right) = \text{常数}$ 。设  $\rho D = \text{常数}$ , 以(4-42)式为边界条件, 积分此式

$$-\frac{1}{r} = \frac{4\pi \rho D}{\dot{m}} \ln(1 - Y_f) - \frac{1}{r_f} \quad (r_s \leq r \leq r_f) \quad (4-53)$$

当  $r = r_s$  时

$$-\frac{1}{r_s} = \frac{4\pi \rho D}{\dot{m}} \ln(1 - Y_{fs}) - \frac{1}{r_f} \quad (4-54)$$



同样,外区有

$$\dot{m}Y_0 - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dY_0}{dr} = -\frac{\dot{m}}{\beta} \quad (4-55)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi\rho D}{\dot{m}} \ln \frac{1 + \beta Y_{0\infty}}{1 + \beta Y_0} \quad (r_f \leq r < \infty) \quad (4-56)$$

当  $r=r_f$  时

$$\frac{1}{r_f} = \frac{4\pi\rho D}{\dot{m}} \ln(1 + \beta Y_{0\infty}) \quad (4-57)$$

由(4-57)式和(4-54)式可得

$$\bar{m} = \frac{\dot{m}}{4\pi\rho Dr_s} = \ln(1 + B) \quad (4-58)$$

其中  $B = \frac{Y_{PS} + \beta Y_{0\infty}}{1 - Y_{PS}}$ , 即(4-44)式。

由(4-58)式和(4-57)式可得

$$\bar{r}_f = \frac{r_f}{r_s} = \frac{\bar{m}}{\ln(1 + \beta Y_{0\infty})} \quad (4-59)$$

内区与外区的能量方程形式相同,即

$$r^2 \rho v C_p \frac{dT}{dr} - \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (4-60)$$

其边界条件为

$$r = r_s \text{ 时} \quad T = T_s$$

$$r = r_f \text{ 时} \quad \left( k \frac{dT}{dr} \right)_{f,1} - \left( k \frac{dT}{dr} \right)_{f,1} = -Q_r \left( \rho D \frac{dY_F}{dr} \right)_f \quad (4-61)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad T = T_\infty$$

对于内区,设  $P_r=1$ ,积分(4-60)式得

$$\dot{m}C_p(T - T_s) - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m}L_v \quad (4-62)$$

$$-\frac{1}{r} = \frac{4\pi\rho D}{\dot{m}} \ln \frac{T - T_s + \frac{L_v}{C_p}}{\frac{L_v}{C_p}} - \frac{1}{r_s} \quad (r_s \leq r \leq r_f) \quad (4-63)$$

当  $r=r_f$  时

$$-\frac{1}{r_f} = \frac{4\pi\rho D}{\bar{m}} \ln \frac{T_f - T_s + \frac{L_v}{C_p}}{\frac{L_v}{C_p}} - \frac{1}{r_s} \quad (4-64)$$

由(4-64)式和(4-57)式可得

$$\bar{m} = \ln \left( 1 + \frac{C_p(T_f - T_s)(1 + \beta Y_{\infty}) + L_v \beta Y_{\infty}}{L_v} \right) \quad (4-65)$$

由(4-65)式和(4-57)式可得

$$\bar{r}_f = 1 + \frac{\ln(1 + C_p(T_f - T_s)/L_v)}{\ln(1 + \beta Y_{\infty})} \quad (4-66)$$

比较(4-58)式和(4-65)式得

$$C_p(T_f - T_s) = \frac{C_p(T_f - T_s) + \beta Y_{\infty}(Q_f - L_v)}{1 + \beta Y_{\infty}} \quad (4-67)$$

或 
$$\frac{C_p(T_f - T_{\infty})}{\beta Y_{\infty}} + L_v + C_p(T_f - T_s) = Q_f \quad (4-68)$$

该式说明反应释放的热一部分使气体温度从  $T_{\infty}$  升到  $T_f$ , 一部分使液滴蒸发, 还有一部分使气化燃料温度从  $T_s$  升到  $T_f$ 。与  $Q_f$  相比, 如果忽略  $(L_v + C_p(T_f - T_s))$  项, 则

$$T_f = T_{\infty} + \beta Y_{\infty} Q_f / C_p \quad (4-69)$$

液滴燃烧时

$$\begin{aligned} q &= -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_s = -\frac{dr_s}{dt} \rho_l L_v = \frac{\rho_s D_s}{r_s} \ln(1 + B) L_v \\ &= h(T_f - T_s) \end{aligned} \quad (4-70)$$

将(4-44)式、(4-45)式和(4-49)式代入上式得

$$N_s = 2 \frac{\ln(1 + B)}{B}$$

同样外区有

$$\dot{m} C_p (T - T_s) - 4\pi\rho D r^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m} (L_v - Q_f) \quad r_f \leq r < \infty \quad (4-71)$$

$$-\frac{1}{r} = \frac{4\pi\rho D}{\dot{m}} \ln \frac{T - T_s + \frac{L_v - Q_f}{C_p}}{T_{\infty} - T_s + \frac{L_v - Q_f}{C_p}}$$

根据以上讨论,可求得液滴燃烧时气相流场的参数分布,如图 4-3 所示。

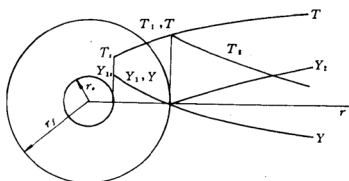


图 4-3 液滴燃烧时外部流场的参数分布

## 4.4 古典模型的修正

### 4.4.1 瞬态过程

实际燃烧过程,液滴初始温度相对于沸点是比较低的,高温气体的能量部分用于提高液滴温度,部分用于液滴蒸发。蒸发速率随液滴温度的升高而升高。气化燃料点火初期,由于燃料浓度较低,故火焰离液滴较近,随后不断扩张,致使燃料蒸气因不能完全燃烧而积聚,这是一个非定常过程。

#### 一、液滴加热

受热液滴的能量守恒方程为

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{a_i}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \quad (4-72)$$

初始条件和边界条件为

$$t = 0 \text{ 时} \quad T_i(r) = T_{i0}(r)$$

$$r = 0 \text{ 时} \quad \frac{\partial T_i}{\partial r} = 0$$

$$r = r_s(t) \text{ 时} \quad 4\pi k_i r^2 \frac{dT_i}{dr} = \dot{m}(H - L_v) \quad (4-73)$$

其中  $H$  为气体传递给液滴的能量,称为有效气化潜热。它使液体气化和液滴升温。

假设气相仍为定常,采用瞬时反应模型时,组元守恒方程形式不变,但能量方程写成

$$\text{内区} \quad \dot{m} C_p (T - T_s) - 4\pi\rho D r^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m} H \quad (4-74)$$

$$\text{外区} \quad \dot{m} C_p (T - T_s) - 4\pi\rho D r^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m} (H - Q_F) \quad (4-75)$$

类似于(4-66)式和(4-67)式得

$$\bar{r}_f = 1 + \frac{\ln(1 + C_p(T_f - T_s)/H)}{\ln(1 + \beta Y_{0\infty})} \quad (4-76)$$

$$C_p(T_f - T_s) = \frac{C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty}(Q_F - H)}{1 + \beta Y_{0\infty}} \quad (4-77)$$

和 
$$H = \frac{(1 - Y_{FS})(C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty} Q_F)}{Y_{FS} + \beta Y_{0\infty} - Y_{F\infty}(1 + \beta Y_{0\infty})} \quad (4-78)$$

$$B_M = \frac{C_p(T_\infty - T_s) + Y_{0\infty} \beta Q_F}{H} \quad (4-79)$$

方程(4-72)通过边界条件(4-73)与方程(4-74)耦合,典型的计算曲线如图 4-4 所示。

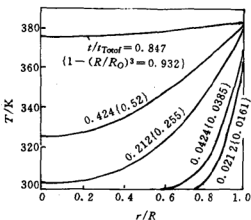


图 4-4 液滴内温度变化曲线

如果液滴温度均匀<sup>[6]</sup>,方程(4-72)可简化为

$$mC_p \frac{dT_s}{dt} = \dot{m}(H - L_v)$$

即 
$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{\dot{m}L_v}{mC_p} \left( \frac{B_T}{B_M} - 1 \right)$$

其中  $B_T = \frac{C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{\infty} Q_F}{L_v}$ 。

随着液滴温度的升高,瞬时加热效应逐渐减弱,  $H - L_v \rightarrow 0$ , 对应的液滴温度趋于湿球温度。

## 二、燃料积聚

点火燃烧初期,火焰阵面的扩张导致部分气化燃料未及反应而残留在火焰与液滴之间<sup>[7]</sup>。质量守恒方程为

$$\dot{m} = \dot{m}_c + \frac{d}{dt} \int_{r_s}^{r_f} 4\pi r^2 \rho Y_r dr$$

其中  $\dot{m}$  为燃料蒸发量,  $\dot{m}_c$  为蒸发燃料的燃烧量,  $\frac{d}{dt} \int_{r_s}^{r_f} 4\pi r^2 \rho Y_r dr$  为蒸发燃料在内区的积聚量。

设液滴温度不变,  $P_r = 1$ , 组元方程和能量方程为  
内区 ( $r_s \leq r \leq r_f$ )。

$$\dot{m}Y_r - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dY_r}{dr} = \dot{m}$$

$$\dot{m}C_p(T - T_s) - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m}H$$

外区  $r_f \leq r < \infty$

$$\dot{m}_c Y_0 - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dY_0}{dr} = -\frac{\dot{m}_c}{\beta}$$

$$\dot{m}_c C_p(T - T_s) - 4\pi\rho Dr^2 \frac{dT}{dr} = -\dot{m}H + \dot{m}_c Q_F$$

其边界条件为

$$r = r_s \text{ 时} \quad Y_r = Y_{rs}, T = T_s$$

$$r = r_f \text{ 时} \quad Y_r = Y_0 = 0, T = T_f$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad T = T_\infty, Y_0 = Y_{\infty}$$

方程有解

$$\bar{m} = \ln \left[ \left( 1 + \frac{C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty} \left( Q_p - \frac{H}{\varepsilon_e} \right)}{L_v(1 + \beta Y_{0\infty})} \right) (1 + \beta Y_{0\infty})^{\frac{1}{\varepsilon_e}} \right] \quad (4-80)$$

$$\bar{r}_f = \frac{\varepsilon_e \bar{m}}{\ln(1 + \beta Y_{0\infty})} \quad (4-81)$$

$$C_p(T_f - T_s) = \frac{C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty} \left( Q_p - \frac{H}{\varepsilon_e} \right)}{1 + \beta Y_0} \quad (4-82)$$

$$H = \frac{(1 - Y_{FS})(C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{0\infty} Q_p)}{Y_{FS} + \beta Y_{0\infty} ((1 - Y_{FS})/\varepsilon_e + Y_{FS})} \quad (4-83)$$

其中  $\varepsilon_e = \frac{m_e}{m}$ 。内区的组元与温度分布为

$$Y_F = 1 - \exp \left( \bar{m} \left( \frac{1}{\bar{r}_f} - \frac{1}{\bar{r}} \right) \right) \quad (4-84)$$

$$C_p(T - T_s) = -L_v + (C_p(T_f - T_s) + L_v) \exp \left\{ \bar{m} \left( \frac{1}{\bar{r}_f} - \frac{1}{\bar{r}} \right) \right\} \quad (4-85)$$

图 4-5 所示为火焰半径变化曲线。从曲线可看出,贫氧环境火焰半径不断增大,始终不能稳定;只有富氧时,火焰才可能趋于稳定,因为富氧时火焰半径较小,燃料的集聚量很少。

#### 4.4.2 多组元液滴<sup>[8,9]</sup>

有些燃料的组分是复杂的,例如汽油含 200 多种组分,沸点从 300 到 500,蒸发过程中液滴的挥发性呈非线性变化,这不仅影响液滴的蒸发,而且影响与反应有关的其它过程,如点火、淬熄、污染气体的生成等等。

多组元液滴燃烧的数学处理与单组元液滴完全类似,采用瞬时燃烧模型时,气相守恒方程为

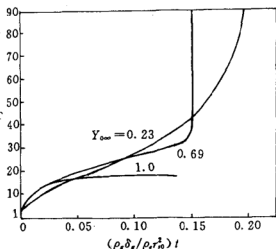


图 4-5 庚烷在氧气、氮气中燃烧的火焰半径变化曲线

内区 ( $r_s \leq r \leq r_f$ )

$$\dot{m}Y_i - 4\pi\rho D r^2 \frac{dY_i}{dr} = \dot{m}_i \quad (4-86)$$

$$\dot{m}C_p(T - T_s) - 4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = -(\sum \dot{m}_i L_{vi} + \dot{m}H_i) \quad (4-87)$$

其中  $i$  表示液滴中  $i$  组分,  $\dot{m} = \sum \dot{m}_i$ ,  $H_i$  为加热液滴所需能量。

外区 ( $r_f \leq r < \infty$ )

$$\dot{m}Y_0 - 4\pi\rho D r^2 \frac{dY_0}{dr} = \sum \frac{\dot{m}_i}{\beta_i} \quad (4-88)$$

$$\dot{m}C_p(T - T_s) - 4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = -(\sum m_i(L_{vi} - Q_{vi}) + \dot{m}H_i) \quad (4-89)$$

其解为(4-65)、式(4-66)式和(4-67)式,式中

$$L_v = \sum \varepsilon_i L_{vi}, Q_v = \sum \varepsilon_i Q_{vi}, \beta = \sum \varepsilon_i \beta_i,$$

$$H = \sum \varepsilon_i L_{vi} + H_i, \varepsilon_i = \frac{m_i}{m} = Y_{is} + (1 - Y_{fs}) \frac{Y_{is} - Y_{if}}{Y_{fs} - Y_{if}}$$

$$Y_f = \sum Y_i$$

其中  $T_s$ 、 $Y_{is}$  和  $\varepsilon_i$  应与液相方程中相应的量耦合。

假设液滴表面两相平衡,根据 Raoult 定律

$$p_{is} = X_{is} p_{is}^0$$

其中  $p_{is}$  为蒸气中组分  $i$  的分压,  $p_{is}^0$  为纯组分  $i$  的饱和蒸气压,  $X_{is}$  为液滴表面处组分  $i$  的摩尔分数。

$$X_{is} = X_{is} X_{is}^0$$

其中  $X_{is}$  为蒸气中组分  $i$  的摩尔分数,  $X_{is}^0$  为纯  $i$  组分的液滴蒸发时, 蒸气中  $i$  组分的摩尔分数, 根据(4-35)式得

$$X_{is}^0 = \frac{p_0}{p} \exp \left\{ \frac{L_i W_i}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s} \right) \right\}$$

仅当流元暴露于液体表面时才可能挥发。液滴收缩、内部环流或扩散是流元暴露于表面的主要原因。如果仅考虑内部扩散, 组元守恒方程为

$$\frac{\partial Y_{is}}{\partial t} = \frac{D_i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial Y_{is}}{\partial r} \right) \quad (4-90)$$

边界条件为

$$Y_{is}(r, t = 0) = Y_{is}(r)$$

$$\left( \frac{\partial Y_{is}}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

$$\dot{m} Y_{is} - \left( 4\pi r^2 \rho_i D_i \frac{\partial Y_{is}}{\partial r} \right)_{r=r_s} = \dot{m}_i$$

能量守恒方程为

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\alpha_i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) \quad (4-91)$$

$$T_i(r, t = 0) = T_{is}(r)$$

边界条件为

$$\left( \frac{\partial T_i}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

$$\left( 4\pi k_i r^2 \frac{dT_i}{dr} \right)_{r=r_s} = \dot{m}(H - L_v)$$

上述方程可用数值方法求解。以等摩尔的癸烷( $C_{10}H_{22}$ )和十二烷( $C_{12}H_{26}$ )组成的液滴在 1 个大气压和 2000K 的环境下蒸发为例(包括燃烧在内), 计算所得曲线如图 4-6 所示。

图 4-6(a)为液滴内部组元浓度分布曲线,  $M = 1 - \left( \frac{r_s}{r_{so}} \right)^3$  表示液滴大小的变化; (b) 反映液滴中心和表面组分浓度的变化。挥发分三个阶段: 初始阶段由于癸烷更易挥发, 故其浓度在液滴表面急



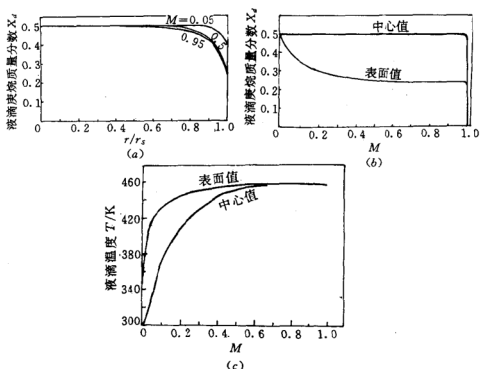


图 4-6 多组元液滴的燃烧

(a) 液滴内组元浓度分布; (b) 液滴中心和表面组元浓度的变化;

(c) 液滴中心和表面的温度变化。

剧下降,造成液滴内部的浓度差。当癸烷向表面扩散的速率等于表面蒸发速率时,表面状态趋于稳定,此为第二阶段称为扩散控制阶段。最后,液滴大小与扩散特征长度趋于同一量级,癸烷内几乎同时蒸发而留下十二烷,称此为挥发控制阶段。(c)为液滴中心和表面处的温度变化曲线,初始阶段,液滴被加热温度上升,后来趋于定常,这与单组元液滴的情形一致。最后只剩下十二烷时,液滴温度突跃至蒸发平衡温度。

扩散控制阶段,流场定常,为保证质量守恒,有  $e_i = Y_{i\infty}$ 。即气化质量分数等于液滴的初始质量分数,液滴直径变化率满足  $d^2$  定律,其中

$$B = \left\{ C_p (T_\infty - T_s) + \frac{\sum Y_{i\infty} Q_{Fi}}{\sum Y_{i\infty} / \beta_i} \right\} / (\sum Y_{i\infty} L_{vi})$$

### 4.4.3 对流效应

#### 一、自然对流<sup>[10]</sup>

气体浮力在流场中形成自然对流,它使得液滴迎风表面形成粘性边界层,火焰阵面位于边界层内,如图 4-7 所示。粘性边界层区域和无粘外部区域分别记作(I)和(II)。

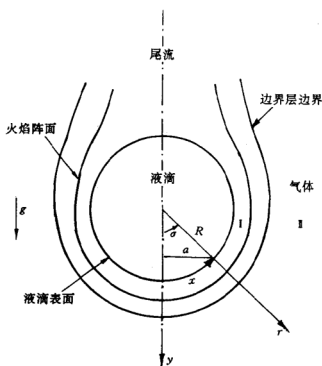


图 4-7 自然对流时液滴燃烧

(I)区采用自然坐标,原点位于滞止点  $S$ ,  $y$  轴为过  $S$  点的法线,  $x$  轴为液滴表面。 $S$  点随液滴表面运动。设气相流场定常且关于  $y$  轴对称,有守恒方程

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (4-92)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + g(\rho_\infty - \rho) \sin \sigma + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4-93)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g(\rho_l - \rho) \cos \sigma \quad (4-94)$$

$$\rho u C_r \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v C_r \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = Q_r w_r \quad (4-95)$$

$$\rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) - \dot{\omega}_i \quad (4-96)$$

其中  $g$  为重力加速度,  $\alpha$  和  $\sigma$  的含义见图 4-7。

方程的边界条件为

$$y \rightarrow \infty \text{ 时} \quad T = T_\infty, p = p_\infty, Y_i = Y_{i\infty}, u = v = 0$$

$$y = 0 \text{ 时} \quad \left( k \frac{dT}{dy} \right)_s = \rho_s v_s L_v$$

$$\rho_s v_s = \rho_s v_s Y_{FS} - \left( \rho D \frac{\partial Y_F}{\partial y} \right)_s$$

$$\rho_s v_s Y_{is} = \rho D \left( \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_s, i \neq F$$

$$T_s = T_l = \text{常数}, u_s = 0$$

$$x = 0 \text{ 时} \quad u = 0, \frac{du}{dx} = \frac{dT}{dx} = \frac{dp}{dx} = 0$$

引入 Shvab-Zeldovich 变量  $b$

$$\rho u \frac{\partial b}{\partial x} + \rho v \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial b}{\partial y} \right)$$

进行无量纲变换, 无量纲变量为

$$\sigma = \frac{x}{d}, z = \frac{1}{d} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy$$

无量纲流函数  $\varphi$  满足  $\alpha \rho u = \mu_\infty \frac{\partial \varphi_s}{\partial y}, \alpha \rho v = \mu_\infty \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}$ , 其它无量纲函数为

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}, P = \frac{(p - p_\infty) T_\infty}{\rho_\infty R (T_s - T_\infty)}, \text{变换后}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma \partial z} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \varphi \cos \sigma \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho_l}{\rho} G_r \frac{\partial P}{\partial \sigma} + G_r \sin \sigma \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^3}$$

$$(4-97)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \cos \sigma \theta \quad (4-98)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \varphi \cos \sigma \right) \frac{\partial b}{\partial z} = P_r^{-1} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \quad (4-99)$$

其中  $G_r = d^3 g (T_s - T_\infty) / \nu_\infty^2 T_\infty$  称为 Grashof 数。

(II) 区采用极坐标, 原点位于液滴中心, 过滞止点的法线极角为零, 有

$$\nabla^2 \varphi_1(r, \sigma) = 0 \quad (4-100)$$

其边界条件为

$$\varphi_1(d, \sigma) = \varphi_1(\infty, \sigma)$$

$$\varphi_1(r, 0) = 0$$

结果表明燃烧速率随液滴表面位置而变化, 变化曲线如图 4-8 所示。

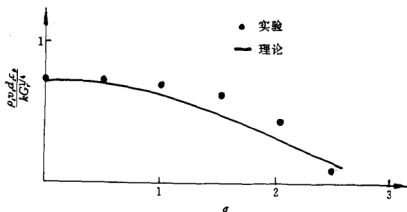


图 4-8 液滴表面燃烧速率的变化

## 二、强迫对流

流场自身的宏观流动称为强迫对流。对流条件下, 液滴迎风面形成粘性边界层, 背面形成尾流。如果气流  $Re$  较大, 液滴内部还形成涡流, 表面附近形成液体边界层和尾流, 该问题只有数值解<sup>[11,12]</sup>。图 4-9 为数值解计算结果, 用来描述液滴表面和中心外的温度变化。

对于实际问题,无须如此了解流场细节。因此,液滴表面参数是一种平均值。最简单的薄膜理论<sup>[15]</sup>假设液滴被气体薄膜所包围,无论外部气体状态如何,薄膜内的气体始终静止,如图 4-10 所

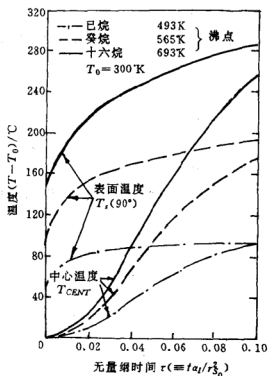


图 4-9 高  $Re$  流场中液滴表面  
和中心处的温度变化

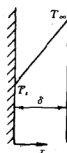


图 4-10  
薄膜模型

示。以热传导为例,薄膜内的能量守恒方程为

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (4-101)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad T = T_s \\ x = \delta & \quad T = T_\infty \end{aligned}$$

其中  $\delta$  为薄膜厚度。

有解

$$T = T_s + (T_\infty - T_s) \frac{x}{\delta} \quad (4-102)$$

进而有

$$-k \frac{dT}{dx} = \frac{k}{\delta} (T_s - T_\infty) = h(T_s - T_\infty)$$

即 
$$h = \frac{k}{\delta}$$

或 
$$N_s = \frac{d}{\delta}$$

薄膜厚度与外部流场的运动状态有关,初始静止的流场,薄膜厚度与液滴半径同一量级。对流情况下,薄膜厚度小于液滴半径。也可对经典结果进行修正

$$\frac{Nu}{Nu_{Re=0}} \left( \text{或} \frac{Sh}{Sh_{Re=0}} \right) = 1 + f(Re, P_r, (\text{或} S_c))$$

其中  $Sh = \frac{k_l d}{D}$  为 Sherwood 数,  $k_l$  为质量传递系数,  $S_c = \frac{\nu}{D}$  为 Schmidt 数。例如 Ranz-Mashall 公式为

$$\frac{Nu}{Nu_{Re=0}} = 1 + 0.3 Re_r^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}} \quad (4-103)$$

或 
$$\frac{Sh}{Sh_{Re=0}} = 1 + 0.3 Re_r^{\frac{1}{2}} S_c^{\frac{1}{3}} \quad (4-104)$$

当  $L_c = 1$  时,根据(3-69)式

$$Nu = \frac{2 \ln(1+B)}{B} (1 + 0.39 Re_r^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}})$$

当  $P_r = 1, Re_r \gg 1$  时

$$\frac{Nu}{2} = 0.39 \frac{\ln(1+B)}{B} Re_r^{\frac{1}{2}} \quad (4-105)$$

由(4-69)式和(4-70)式得

$$\frac{Nu}{2} = \frac{\rho_s v_s r_s}{\mu} \frac{L_c}{(C_p(T_\infty - T_s) + \beta Y_{\infty} Q_p)}$$

将(4-44)式代入上式

$$\frac{Nu}{2} = \frac{\rho_s v_s r_s}{\mu B}$$

因此(4-105)式可写成

$$\frac{\rho_s v_s r_s}{\mu} = 0.39 \ln(1+B) Re_F^{\frac{1}{2}} \propto r_s^{\frac{1}{2}}$$

故液滴消耗率

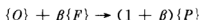
$$\dot{m} = 4\pi\rho_s v_s r_s^2 \propto r_s^{\frac{3}{2}} \quad (4-106)$$

即对流条件下,液滴燃烧速率满足  $d^{\frac{3}{2}}$  定律。

气流作用下,液滴还会变形、剥离甚致破碎,这与流场的 Weber 数有关,将在以后讨论。

#### 4.4.4 超临界燃烧

环境压力增大时,定常蒸发所对应的湿球温度随之增大。当压力接近或超过临界压力时,气液两相的差异消失,即两相互溶且具有相同的温度、比焓和密度等。此时液滴收缩率与流场速度处于同一量级,外部将不再定常。Spalding 等人<sup>[14,15]</sup>用一团蒸气代替液滴,该蒸气被火焰所包围,燃料和氧化剂分别从内、外两侧向火焰阵面扩散,反应方程为



忽略法向速度,有组元守恒方程

$$\rho \frac{\partial Y_F}{\partial t} - \frac{\rho D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial Y_F}{\partial r} \right) = -r^2 \dot{\omega}_F \quad (4-107)$$

$$\rho \frac{\partial Y_O}{\partial t} - \frac{\rho D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial Y_O}{\partial r} \right) = r^2 \frac{\dot{\omega}_F (1 + \beta)}{\beta} \quad (4-108)$$

引进变量  $Z = (1 + \beta)Y_F + \beta Y_O$ ,

$$\rho \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial Z}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-109)$$

当  $t=0, r \leq r_f$  时

$$Z_0 = 1 + \beta$$

当  $r \rightarrow \infty$  时

$$Z_\infty = \beta Y_{F\infty}$$

令  $b = \frac{Z - Z_\infty}{Z_0 - Z_\infty}$ ,

$$\rho \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\rho D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial b}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-110)$$

其边界条件为

$$r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad b = 0$$

$$t = 0, r \leq r_f \text{ 时} \quad b = 1$$

$$r > r_f \text{ 时} \quad b = 0$$

设初始时刻, 流场中燃料的质量为  $M_f$ , 根据质量守恒定律

$$M_f = \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho \left( Y_f + \frac{\beta}{1+\beta} Y_r \right) dr$$

方程(4-110)有解

$$b = \frac{M_f}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (4-111)$$

令火焰阵面上  $Y_r = 0, Y_0 = 0$  和  $Y_r = 1$ , 无穷远处  $Y_{r\infty} + Y_{0\infty} = 1$

$$b_f = \frac{Y_{0\infty}}{\frac{1}{\beta} + Y_{0\infty}}$$

代入(4-111)式得

$$\frac{r_f^2}{4Dt} = \ln \frac{M_f}{\rho b_f (4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \quad (4-112)$$

定义无量纲参数

$$\varphi = \frac{r_f}{(M_f/\rho b_f)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\theta = \frac{4\pi Dt}{(M_f/\rho b_f)^{\frac{2}{3}}}$$

上式写成

$$\varphi = \left( - \left( \frac{3}{2\pi} \right) \theta \ln \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-113)$$

其关系曲线如图 4-11 所示。当  $\theta = 0.368$  时,  $\varphi_{\max} = 0.419$  为最大值, 对应于最大火焰半径

$$(r_f)_{\max} = 0.419 \left( \frac{M_f}{\rho b_f} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4-114)$$

$\varphi = 0$  时,  $\theta = 1$ , 对应于液滴完全燃烧, 故



$$t_b = \frac{(M_f / \rho b_f)^{\frac{2}{3}}}{4\pi D}$$

或

$$t_b = \frac{\rho^{\frac{1}{3}} (M_f / b_f)^{\frac{2}{3}}}{4\pi \rho D} \propto p^{\frac{1}{3}} \quad (4-115)$$

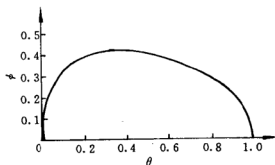


图 4-11 火焰半径随时间的变化

该式说明液滴完全燃烧时间与压力的 $\frac{1}{3}$ 次方成比例。其结果得到实验证实。

## 第五章 粉 尘 燃 烧

液滴燃烧的古典模型设液滴在燃烧过程中状态不变,保持湿球温度。但粉尘颗粒燃烧时,颗粒内部会出现各种物理、化学变化。例如金属颗粒会熔化、蒸发;有机颗粒会热解、挥发;生成固体残渣或凝聚物的燃烧会在颗粒表面出现覆盖层;多孔颗粒会出现内流动与反应等等。因此,讨论粉尘颗粒燃烧时,除需考虑外部流场的变化外还需考虑颗粒内部的变化。外部流场的守恒方程与颗粒内部的守恒方程通过颗粒表面的边界条件来耦合,这些条件包括界面上的浓度、温度、质量流量和能量流量等等,问题相当复杂。

本章内容包括:多孔颗粒,讨论孔结构、孔内的扩散、流动和界面反应;颗粒外部的温度和浓度场;无孔颗粒燃烧时无灰分的缩球模型和有灰分的缩核模型;多孔颗粒燃烧时有灰分和无灰分的各种模型;有气体挥发且发生在气相的燃烧,包括金属颗粒和有机颗粒。

### 5.1 多 孔 颗 粒

#### 5.1.1 孔结构

为描述多孔堆积物料的特性,引进如下概念:

(1)密度 粉状压实介质的体积  $V_c$  通常由三部分组成,即介质实际占有的体积称为骨架体积  $V_{sk}$ ,颗粒间的孔隙  $V_{sp}$  和颗粒内的孔隙  $V_{po}$

$$V_c = V_{sk} + V_{sp} + V_{po}$$

记压实介质的质量为  $m$  , 则

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{m}{V_s} = \frac{m}{V_{sk} + V_{sp} + V_{po}} \\ \bar{\rho}_p &= \frac{m}{V_p} \\ \rho_t &= \frac{m}{V_{sk}}\end{aligned}$$

其中  $V_p = V_{sk} + V_{po}$  为多孔颗粒的体积,  $\rho_k$ 、 $\bar{\rho}_p$  和  $\rho_t$  分别为堆积密度, 颗粒密度和材料密度。

(2) 比表面积 单位质量的固体物料所具有的总表面积称为比表面积, 记作  $S_g$ 。

(3) 比孔容 单位质量的固体物料的孔隙容积称为比孔容, 记作  $V_g$ ,

$$V_g = \frac{V_{po}}{m} = \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_t}$$

(4) 孔隙度 单位体积的固体物料的孔隙容积称为孔隙度, 记作  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{V_{po}}{V_{sk} + V_{po}} = V_g \bar{\rho}_p \quad (5-1)$$

或

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{V_g \rho_t}{1 + V_g \rho_t} \\ \rho_t(1 - \varepsilon) &= \bar{\rho}_p\end{aligned}$$

孔的结构是非常复杂的, 可用一些模型来描述, 最简单的是 Wheeler 提出的平行孔模型<sup>[1]</sup>, 它假设孔隙皆为半径为  $\bar{r}$  长为  $\bar{L}$  的内壁光滑相互平行的圆柱孔。若颗粒外表面的总面积为  $S_s$ , 单位面积的孔口数为  $N_s$ , 总孔口数则为  $N_s S_s$ , 总内表面积为  $S_s N_s 2\pi \bar{r} \bar{L}$ 。有

$$S_s N_s 2\pi \bar{r} \bar{L} = V_g \bar{\rho}_p S_g$$

同样  $S_s N_s \pi \bar{r}^2 \bar{L} = V_g \bar{\rho}_p \bar{V}_g \quad (5-2)$

因此  $\bar{r} = \frac{2V_g}{S_g} \quad (5-3)$

其中  $V_g$  和  $S_g$  可由实验测定。

如果孔是扭曲的,即孔的轴线与颗粒外表面的法线具有一定夹角,如图 5-1 所示,显然  $\frac{\Delta}{\Delta x} = \frac{1}{\cos \alpha} = \delta$ , 其中  $\Delta$  和  $\Delta x$  分别为孔的母线和  $x$  轴上的微元。如果  $\delta = \text{常数}$ , 孔口截面积为  $A_p = \pi r^2 \delta$ , 有

$$\varepsilon = N_p A_p = N_p \pi r^2 \delta$$

代入 (5-1) 式得

$$N_p = \frac{\bar{\rho}_p V_g}{\delta \pi r^2} \quad (5-4)$$

比较 (5-2) 式和 (5-4) 式得

$$\bar{L} = \frac{\delta V_p}{S_g}$$

球形颗粒  $\frac{V_p}{S_g} = \frac{d}{6}$ , 其中  $d$  为颗粒粒径, 当  $\alpha = 45^\circ$  时

$$\bar{L} = \frac{\sqrt{2}}{6} d$$

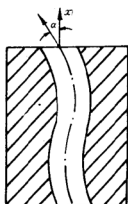


图 5-1 平行孔模型

### 5.1.2 孔内扩散<sup>[2]</sup>

气体分子的孔内扩散与 Knudsen 数  $K_n = \frac{r}{l}$  有关, 其中  $r$  为孔径,  $l$  为分子运动平均自由程。  $K_n \gg 1$  时, 孔径较大或气体密度较大, 忽略分子与孔壁的碰撞, 扩散与分子碰撞有关, 称为分子扩散或普通扩散。  $K_n \ll 1$  时, 孔径很小或气体密度很低, 忽略分子间的碰撞, 扩散与分子和孔壁的碰撞有关, 称为 Knudsen 扩散。  $0.1 < K_n < 10$  时, 上述两类扩散同时存在, 称为过渡扩散。

#### 一、普通扩散

根据 4.1 节的讨论, 组分  $A$  的摩尔流率为

$$I_A = -nD \frac{dX_A}{dz} + n_A u^M = -nD \frac{dX_A}{dz} + n_A X_A u_A + n_A X_B u_B = u_A n_A$$

或

$$-nD \frac{dX_A}{dz} = \frac{n_A n_B}{n} (u_A - u_B)$$

对于完全气体  $n = \frac{p}{RT}$ ,  $pX_A = p_A$ , 恒压时

$$-\frac{dp_A}{dx} = \frac{RT}{nD} n_A n_B (u_A - u_B) = \frac{kT}{nD} \tilde{n}_A \tilde{n}_B (u_A - u_B) \quad (5-5)$$

## 二、Knudsen 扩散

对于 Knudsen 扩散, 分子与管壁的碰撞频率较分子间的碰撞频率大得多, 如图 5-2 所示, 沿  $x$  方向, 组分  $A$  的扩散流率为

$$I_A = u_A n_A$$

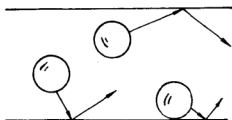


图 5-2 Knudsen 扩散

其中  $u_A$  为组分  $A$  在  $x$  方向的平均速度。

组分  $A$  与孔壁碰撞时传递的动量为  $m_A u_A$ ,  $m_A$  为组分  $A$  的分子质量。由于分子与管壁的碰撞频率为  $\frac{\tilde{n}_A \tilde{v}_A}{4}$ ,  $\tilde{v}_A$  为组分  $A$  的分子运动平均速度, 故孔壁上单位面积的动量传递速率为  $m_A u_A \frac{\tilde{n}_A \tilde{v}_A}{4}$ , 忽略管壁的动量损失

$$-\pi r^2 dp_A = \frac{\tilde{n}_A m_A u_A \tilde{v}_A}{4} 2\pi r dx$$

即

$$-\frac{dp_A}{dx} = \frac{I_A W_A \tilde{v}_A}{2r} \quad (5-6)$$

Knudsen 扩散与分子间的碰撞无关, 类似于渗透过程, 有

$$n_A u_A = -D_{AK} n \frac{dX_A}{dx} = -\frac{D_{AK} n}{p} \frac{dp_A}{dx}$$

即

$$-\frac{dp_A}{dx} = \frac{RT}{D_{AK}} I_A \quad (5-7)$$

比较(5-6)式和(5-7)式得

$$D_{AK} = \frac{2r}{W_A} \frac{RT}{\tilde{v}_A}$$

由于  $\bar{v}_A = \sqrt{\frac{8RT}{\pi W_A}}$

$$D_{AK} = \frac{\pi}{4} r \bar{v}_A$$

通常写成

$$D_{AK} = \frac{2}{3} r \bar{v}_A \quad (5-8)$$

使用特定单位时

$$D_{AK} = 9.7 r \left( \frac{T}{W_A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中  $r$  的单位取 m,  $T$  取 K,  $W_A$  取  $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ,  $D_{AK}$  的单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ 。

恒压时

$$\frac{dp_A}{dx} + \frac{dp_B}{dx} = 0$$

故

$$W_A u_A \bar{n}_A \bar{v}_A + W_B u_B \bar{n}_B \bar{v}_B = 0$$

由于  $\frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = \left( \frac{W_B}{W_A} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{n_A u_A}{n_B u_B} = \frac{I_A}{I_B} = - \left( \frac{W_B}{W_A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5-9)$$

此式称为 Grahams 扩散定律, 当  $r \ll l$  时, 双组分 Knudsen 扩散的扩散流率与分子量有关。

### 三、过渡扩散

0.1 <  $K_s$  < 10 时, 两类扩散同时存在, 根据(5-5)式和(5-6)式得

$$-\frac{dp_A}{dx} = \frac{kT}{\bar{n}D_{AE}} \bar{n}_A \bar{n}_B (u_A - u_B) + \frac{I_A W_A \bar{v}_A}{2r} \quad (5-10)$$

由于

$$\frac{\bar{n}_A \bar{n}_B (u_A - u_B)}{\bar{n}} = A_v I_A x_B \left( 1 - \frac{u_B}{u_A} \right)$$

$$X_B \left( \frac{u_B}{u_A} \right) = X_A \left( \frac{I_B}{I_A} \right)$$

故

$$\frac{\bar{n}_A \bar{n}_B (u_A - u_B)}{\bar{n}} = A_v I_A (1 - \alpha X_A)$$

其中  $\alpha = 1 + \frac{I_B}{I_A}$ 。

由(5-8)式得

$$\frac{I_A W_A \bar{v}_A}{2r} = \frac{I_A RT}{D_{AK}}$$

上述两式代入(5-10)式得

$$-dp_A = \frac{I_A RT}{D_{AK}} dx + \frac{RT I_A}{D_{AB}} (1 - \alpha X_A) dx$$

即

$$I_A = -nD \frac{dX_A}{dx} \quad (5-11)$$

其中  $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{AK}} + \frac{1 - \alpha X_A}{D_{AB}}$ 。

当  $I_A = -I_B$  时,  $\alpha = 0$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{AK}} + \frac{1}{D_{AB}} \quad (5-12)$$

此式类似于并联电路的电阻公式, 扩散系数表示质量传递的阻力。

#### 四、几何因子

如图 5-3 所示的多孔介质, 单位截面组分 A 的摩尔流率为

$$I_A = nD_e \frac{dX_A}{dx} = -\frac{p}{RT} D_e \frac{dX_A}{dx}$$

其中  $D_e$  为多孔介质的有效扩散系数。

在单个孔内, 单位孔面积上组分 A 的摩尔流率为

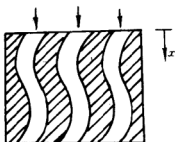


图 5-3 多孔介质的孔内扩散

$$i_A = -\frac{p}{RT} D \frac{dX_A}{dl}$$

其中  $l = \delta x$ ,  $\delta$  为扭曲因子。取值范围通常在  $1.5 < \delta < 10$ 。

上式亦可写成

$$i_A = -\frac{p}{RT} \frac{D}{\delta} \frac{dX_A}{dx}$$

如果采用平行孔模型

$$\frac{V_g}{V_s} = \frac{A_p}{A} = \varepsilon$$

其中  $A$  为多孔介质的横截面积,  $A_p$  为截面上的孔隙面积。故

$$I_A = \varepsilon i_A$$

即

$$-\frac{p}{RT} D_e \frac{dX_A}{dx} = -\frac{p}{RT} \frac{D \varepsilon}{\delta} \frac{dX_A}{dx}$$

因此 
$$D_e = fD \quad (5-13)$$

其中  $f = \frac{\varepsilon}{\delta}$  称为几何因子。

由 (5-12) 式得 
$$\frac{1}{fD} = \frac{1}{fD_{AK}} + \frac{1}{fD_{AB}}$$

即 
$$\frac{1}{D_e} = \frac{1}{D_{AK,e}} + \frac{1}{D_{AB,e}} \quad (5-14)$$

其中  $D_{AK,e} = fD_{AK}$ ,  $D_{AB,e} = fD_{AB}$  称为有效扩散系数。

### 5.1.3 孔内流动<sup>[3]</sup>

根据前节讨论,完全气体孔内扩散时,摩尔流率的通式为

$$I_A = - D_{A,e} \frac{dn_A}{dx} + X_A J_C \delta$$

其中  $J_C = nu$ ,  $\delta = \frac{D_{K,e}}{D_{A,e} + D_{K,e}}$ 。当  $D_{K,e} \gg D_{A,e}$  时,  $\delta = 1$ , 为普通扩散; 当  $D_{A,e} \gg D_{K,e}$  时,  $\delta = 0$ , 为 Knudsen 扩散。

如果孔内存在压力梯度,这将影响宏观流动,于是

$$I_A = - D_{A,e} \frac{dn_A}{dx} + X_A (J_C - J_v) \delta_A(p)$$

其中  $J_v$  为压力梯度导致的附加流率,  $\delta$  是压力的函数。

因此,多孔介质中的总摩尔流率为

$$I_{A,\text{total}} = I_A + X_A J_v = - D_{A,e} \frac{dn_A}{dx} + X_A \delta_A(p) J_C + X_A (1 - \delta_A(p)) J_v \quad (5-15)$$

右端第一项表示浓度梯度造成的质量输运,第二项表示不考虑压力梯度时宏观流动造成的质量输运,第三项表示压力梯度引起的质量输运。

气体—颗粒模型<sup>[4]</sup>认为多孔介质由均匀散布的,静止的大小相同的颗粒组成,其数密度为  $\tilde{n}_t$ , 半径为  $r$ , 如图 5-4 所示。

颗粒在流场受 Stokes 力作用,即

$$F_d = 6\pi r \mu v$$

欲使颗粒平衡必有



$$\frac{dp}{dx} = - \bar{n}_t F_d$$

即 
$$r = - \frac{1}{\bar{n}_t (6\pi r) \mu} \frac{dp}{dx}$$

故 
$$J_r = n v = - \frac{p}{\bar{n}_t (6\pi r) \mu} \frac{dp}{dx}$$

对于完全气体,  $n = \frac{p}{RT}$ , 于是

$$J_r = - \frac{p B_0}{\mu RT} \frac{dp}{dx} \quad (5-16)$$

其中  $B_0 = \frac{1}{(6\pi r) \bar{n}_t}$  是与孔结构有关的特征常数, 称为渗透率。将 (5-16) 式代入 (5-15) 式得

$$I_{A, \text{total}} = - D_{A, e} \nabla n_A + X_A \delta_A(p) J_C - X_A (1 - \delta_A(p)) \frac{p B_0}{\mu RT} \nabla p$$

当  $J_C = 0$ , 即无宏观对流时

$$I_{A, \text{total}} = - D_{A, e} \nabla n_A - X_A (1 - \delta_A(p)) \frac{p B_0}{\mu RT} \nabla p$$

对于单组分扩散,  $X_A = 1$ , 当  $K_s \ll 1$  时,  $D_{A, e} \gg D_{k, e}$ ,  $\delta_A(p) = 0$ , 故

$$I_{\text{total}} = - D_{k, e} \nabla n - \frac{B_0 p}{\mu RT} \nabla p$$

恒温下  $\nabla n = \frac{\nabla p}{RT}$

$$I_{\text{total}} = - \left( D_{k, e} + \frac{B_0 p}{\mu} \right) \frac{\nabla p}{RT} \quad (5-17)$$

称为 Darcy 定律。

如果忽略孔内 Knudsen 扩散, 仅考虑压力差引起的质量输运

$$I_{\text{total}} = - \frac{p B_0}{\mu} \frac{\nabla p}{RT}$$

即

$$n u = - \frac{p B_0}{\mu} \frac{\nabla p}{RT}$$

由于  $n = \frac{p}{RT}$ , 故

$$u = - \frac{B_0}{\mu} \frac{\nabla p}{\nabla p} \quad (5-18)$$

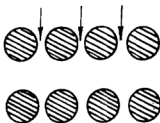


图 5-4 气体—颗粒  
孔结构模型

该方程表明,压力梯度作用下流体流经多孔介质时,流速与压力梯度成正比与流体粘性成反比。

### 5.1.4 孔内反应

#### 一、有效因子

气—固反应速率可用单位表面积的反应率来表示,如果仅考虑气体组元浓度和温度的影响,则

$$R_s = R_s(n_i, T)$$

对于多孔颗粒,反应不仅发生在外表面,而且发生在内部孔壁,可以认为整个颗粒都在反应,称为准均相反应。此时,单位体积的反应速率

$$R = \rho_s(1 - \varepsilon)S_p R_s(n_i, T) = S_p R_s(n_i, T) = R(n_i, T)$$

其中  $\rho_s$  为多孔颗粒的材料密度,  $\varepsilon$  为孔隙度,  $S_p$  为比表面积,  $S_p$  为单位体积的多孔颗粒所具有的总表面积。

整个颗粒的化学反应速率写成

$$R_p = \iiint_V R dV$$

由于孔内扩散和热传导,颗粒内部浓度、温度以及反应速率均具有空间分布,故上式是比较复杂的。如果忽略这种传导和扩散,即温度和浓度在孔内均匀分布且等于颗粒表面的值

$$R_{p0} = R_0 V_p$$

其中  $R_0 = R(n_{is}, T_s)$ , 脚标  $s$  表示颗粒外表面。

Damkohler 等人引进有效因子

$$\xi = \frac{R_p}{R_{p0}} = \frac{\iiint_V R dv}{\iiint_V R_0 dV}$$

通过  $\xi$ , 整个颗粒的化学反应速率则可用颗粒外表面的温度和气体的浓度来表示,这使问题大大简化。

## 二、球形多孔颗粒的有效因子<sup>[5]</sup>

设球形多孔催化剂颗粒与组分  $A$  的反应方程为



将其视作准均相反应,当反应为一级反应时,以摩尔为单位,有

$$R = S_v \bar{k} n_A$$

$\bar{k}$  为化学反应速率常数。孔内组元守恒方程为

$$\frac{D_e}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dn_A}{dr} \right) - S_v \bar{k} n_A = 0 \quad (5-19)$$

其边界条件为

$$\begin{aligned} r=r_0 & \quad n_A=n_{AS} \\ r=0 & \quad \frac{dn_A}{dr}=0 \end{aligned}$$

其中  $r_0$  为颗粒半径,  $n_{AS}$  为组分  $A$  在颗粒外表面的摩尔浓度。

引进无量纲量  $\varphi = \frac{n_A}{n_{AS}}, \eta = \frac{r}{r_0}$

$$\frac{1}{\eta^2} \left( \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right) \right) = h_s^2 \varphi$$

其中  $h_s = r_0 \sqrt{\frac{S_v \bar{k}}{D_e}}$ 。

边界条件为

$$\begin{aligned} \eta=1 \text{ 时} & \quad \varphi=1 \\ \eta=0 \text{ 时} & \quad \frac{d\varphi}{d\eta}=0 \end{aligned}$$

令  $F = \varphi\eta$

$$\frac{d^2 F}{d\eta^2} - h_s^2 F = 0$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \eta=1 \text{ 时} & \quad F=1 \\ \eta=0 \text{ 时} & \quad F=0 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} P &= \frac{dF}{d\eta} \\ P \frac{dP}{dF} &= h_s^2 F \end{aligned}$$

其解为

$$P^2 = h_s^2 F^2 \pm C_1^2$$

即

$$\frac{dF}{\sqrt{(h_s F)^2 \pm C_1^2}} = d\eta$$

取正号时

$$Sh^{-1}\left(\frac{h_s F}{C_1}\right) = h_s \eta + C_2$$

取负号时

$$Ch^{-1}\left(\frac{h_s F}{C_1}\right) = h_s \eta + C_2$$

由于  $\eta=0$  时  $F=0$  超出  $Ch^{-1}(x)$  的定义域,故

$$Sh^{-1}\left(\frac{h_s F}{C_1}\right) = h_s \eta + C_2$$

根据边界条件  $C_2=0, C_1=\frac{h_s}{Shh_s}$ , 于是

$$\varphi = \frac{Sh(h_s \eta)}{\eta Sh(h_s)} \quad (5-20)$$

即

$$n_A = \frac{n_{As} T_0}{r} \frac{Sh\left(\frac{h_s r}{r_0}\right)}{Shh_s} \quad (5-21)$$

由于流场定常, 气体向颗粒内部的传递速率等于整个颗粒的反应速率

$$R_r = 4\pi r_0 n_{As} D_r \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=1}$$

由(5-20)式得

$$\left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{\eta=1} = h_s \left( \frac{1}{thh_s} - \frac{1}{h_s} \right)$$

故

$$R_r = 4\pi r_0 n_{As} D_r h_s \left( \frac{1}{thh_s} - \frac{1}{h_s} \right)$$

又

$$R_{r0} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 S_r \bar{k} n_{As}$$

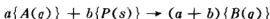
因此,球形多孔颗粒的有效因子

$$\xi = \frac{R_p}{R_{p0}} = \frac{3}{h_s} \left( \frac{1}{thh_s} - \frac{1}{h_s} \right) \quad (5-22)$$

## 5.2 外部流场

### 5.2.1 Stefan 流

将颗粒置于无限大的静止的气体中,化学反应仅在界面进行,其反应方程为



设颗粒外部的流场定常,由于反应仅发生在界面,有组元守恒方程

$$\nabla \cdot (I)_k = \nabla \cdot (m_j k + C_k v) = 0$$

其中  $I_k$  为气体中组分  $k$  的质量流率,  $m_j k$  为组分  $k$  的扩散流率,根据 Fick 定律

$$m_j k = -D\rho \nabla Y_k$$

$C_k v$  为宏观对流流率,  $v$  为宏观运动速度。

对于双组分体系

$$m_j A + m_j B = 0$$

进而有

$$I_A + I_B = (C_A + C_B)v = \rho v$$

即

$$\nabla \cdot (I_A + I_B) = \nabla \cdot (\rho v)$$

当颗粒表面化学活性均匀时,有

$$r^2(I_A + I_B) = r^2 \rho v = \text{常数} \quad (5-23)$$

其中  $I_A, I_B$  和  $v$  为球面法向的质量流率和流体速度。

根据反应方程,流场定常时

$$I_{AS} = -aI_{BS}$$

脚标  $S$  表示颗粒界面。将该式代入(5-23)式得

$$\rho_s v_s = I_{AS} + I_{BS} = \left( 1 - \frac{1}{a} \right) I_{AS} \quad (5-24)$$

对于原来静止的气体,颗粒的反应导致界面处出现宏观流动,这与液滴蒸发的效果一样。这种因界面处的化学或物理过程而产生的宏观流动称为 Stefan 流。

## 5.2.2 浓度和温度分布

定常流动,气体中氧化剂  $A$  的守恒方程为

$$\nabla \cdot I_A = 0$$

其中组分  $A$  的质量流率  $I_A = -D\rho \nabla Y_A + C_A v$ ,  $C_A = \rho Y_A$ 。

球对称时

$$r_s^2 I_{As} = -r^2 D\rho \frac{dY_A}{dr} + r^2 \rho v Y_A$$

由(5-24)式和  $r^2 \rho v = r_s^2 \rho_s v_s$  得

$$r^2 D\rho = \frac{dY_A}{dr} = r^2 \rho v \left( Y_A - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \right) \quad (5-25)$$

设  $D\rho = \text{常数}$ , 由边界条件  $r = \infty$  时  $Y_A = Y_{A\infty}$

$$-\frac{r_s^2 \rho_s v_s}{D_s \rho_s} \frac{1}{r} = \ln \frac{Y_A - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}{Y_{A\infty} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \quad (5-26)$$

$$\text{当 } r = r_s \text{ 时} \quad v_s = \frac{D_s}{r_s} \ln(1 + B_M) \quad (5-27)$$

其中

$$B_M = \frac{Y_{A\infty} - Y_{As}}{Y_{As} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$$

颗粒外流场的能量守恒方程为

$$r^2 \rho v C_p \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \quad (5-28)$$

该方程的边界条件为

$$r = r_s \text{ 时} \quad \left( k \frac{dT}{dr_s} \right) = - Q I_{AS} = - \frac{\rho_s v_s}{1 - \frac{1}{a}} Q$$

其中  $Q$  为单位质量的  $A$  燃烧释放的热。

$$r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad T = T_\infty$$

有解

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{r_s^2 \rho_s v_s C_p} \ln \frac{C_p(T_\infty - T_s) - \frac{Q}{1 - \frac{1}{a}}}{C_p(T - T_s) - \frac{Q}{1 - \frac{1}{a}}} \quad (5-29)$$

$$\text{当 } r = r_s \text{ 时} \quad v_s = \frac{\alpha_s}{r_s} \ln(1 + B_T) \quad (5-30)$$

其中  $\alpha_s = \frac{k}{\rho_s C_p}$ ,  $B_T = \frac{C_p(T_\infty - T_s)}{Q} \left( \frac{1}{a} - 1 \right)$ 。当  $a = D$  时, 比较(5-27)式和(5-30)式得

$$\text{即} \quad \frac{C_p(T_p - T_s) \left( \frac{1}{a} - 1 \right)}{Q} = \frac{Y_{A\infty} - Y_{AS}}{Y_{AS} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \quad (5-31)$$

对于多孔颗粒, 化学反应速率用(5-19)式表示, 设界面反应为  $m$  级反应, 以质量为单位时得

$$R_p = \frac{4}{3} \pi r_s^3 S_p \bar{k} C_{AS}^m \xi$$

式中  $\bar{k}$  为化学反应速率常数。于是, 颗粒单位表面积的反应速率

$$R_{ps} = k' C_{AS}^m = k' (\rho_s Y_{AS})^m$$

其中  $k' = \frac{r_s S_p \bar{k} \xi}{3}$ 。因此, 反应速率常数为  $\bar{k}$  的多孔颗粒等价于反应速率常数为  $k'$  的无孔颗粒。

$$\text{故} \quad \rho_s D_s \left( \frac{dY_A}{dr} \right)_{r=r_s} = k' (\rho_s Y_{AS})^m$$

代入(5-25)式得

$$\rho_s v_s = \frac{k' (\rho_s Y_{AS})^m}{Y_{AS} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$$

将上式代入(5-26)式得

$$\frac{r_s^2}{\rho_s D_s r} \frac{k' (\rho_s Y_{AS})^m}{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_{AS}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \ln \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_A}{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_{A\infty}}$$

当  $r = r_s$  时

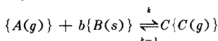
$$\frac{r_s k' (\rho_s Y_{AS})^m}{\rho_s D_s \left(1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_{AS}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \ln \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_{AS}}{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) Y_{A\infty}} \quad (5-32)$$

由(5-31)式和(5-32)式可求得  $T_s$  和  $Y_{AS}$ 。

## 5.3 无孔颗粒燃烧

### 5.3.1 缩球模型

无孔颗粒燃烧时,如果没有固体产物残留在表面,颗粒将不断缩小。设反应方程为



由于燃烧产物皆为气体,故又称为全气化反应。

描述该过程的缩球模型<sup>[8]</sup>假设反应过程中主气流参数不变,颗粒形状和温度不变,且忽略颗粒内的挥发分,设反应仅发生在颗粒界面。反应过程如图 5-5 所示,包括如下步骤:(1)氧化剂分子  $A$  经扩散抵达颗粒表面;(2)表面反应生成产物  $C$ ;(3)产物  $C$  经扩散离开颗粒表面。上述步骤依次进行,而燃烧气化速率由最慢的步骤决定。



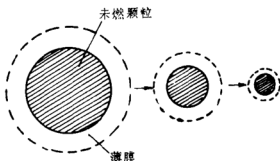


图 5-5 无孔颗粒燃烧的缩球模型

对于不可逆一级反应,单位颗粒外表面的反应速率为

$$R_{es} = k_1 C_{AS} - k_{-1} C_{CS} = k_1 \left( C_{AS} - \frac{C_{CS}}{K_E} \right) \quad (5-33)$$

其中  $K_E = \frac{k_1}{k_{-1}}$  为化学平衡常数,  $k_1$  和  $k_{-1}$  分别为正逆反应的化学反应速率常数。

### 一、化学反应控制

当界面反应为控制步骤时,气体与颗粒间的质量扩散速率非常大,有  $C_{AS} = C_{A\infty}$ ,  $C_{CS} = C_{C\infty}$ , 于是

$$R_{es} = k_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)$$

颗粒的消耗率为

$$-\bar{\rho}_p \frac{dr}{dt} = bR_{es} = bk_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)$$

式中  $r$  为颗粒半径(或圆柱形颗粒的圆半径,平板颗粒的半平板厚度),  $\bar{\rho}_p$  为颗粒材料密度,  $b$  为反应计量系数。

引进无量纲量  $\xi = \frac{r}{r_0}$ ,  $r_0$  为初始值

$$t^* = \frac{bk_1}{\bar{\rho}_p} \frac{1}{r_0} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) t \quad (5-34)$$

于是

$$\frac{d\xi}{dt^*} = 1$$

其初始条件为  $t^* = 0$  时,  $\xi = 1$ ;  $t^* = 1$  时,  $\xi = 0$  意味着颗粒全部烧

完,故

$$\begin{aligned}\xi &= 1 - t^* & t^* &\leq 1 \\ \xi &= 0 & t^* &> 1\end{aligned}$$

显然颗粒完全反应时间

$$t_b = \frac{\rho_p r_0}{bk_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)}$$

即

$$t^* = \frac{t}{t_b}$$

引进无量纲  $X = \frac{\text{已消耗的颗粒体积}}{\text{颗粒初始体积}}$  称为转换分数。球形颗粒

$$X = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_0^3}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = 1 - \xi^3$$

若定义  $f = \frac{rA_f}{V_f}$ , 称为形状因子, 其中  $A_f$  和  $V_f$  分别为颗粒外表面积和体积

$$X = 1 - \xi^f$$

或

$$\xi = (1 - X)^{\frac{1}{f}}$$

$f=1, 2, 3$  对应于平板、圆柱和球。

代入(5-34)式得

$$t^* = 1 - (1 - X)^{\frac{1}{f}} = g_f(X) \quad (5-35)$$

## 二、质量传递控制

如果颗粒界面的反应速率非常快, 颗粒表面与主气流之间的质量传递为燃烧过程的控制步骤

$$R_{rx} = k_l(C_{A\infty} - C_{AS}) = k_l(C_{CS} - C_{C\infty}) \quad (5-36)$$

其中  $k_l$  为质量传递系数。视反应处于平衡状态, 根据平衡关系式

$$C_{AS} = \frac{C_{CS}}{K_E} \quad (5-37)$$

由上述两式

$$C_{AS} = \frac{1}{1 + K_E}(C_{C\infty} + C_{A\infty})$$

$$R_{es} = k_i \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty} + C_{A\infty}}{1 + K_E} \right)$$

故颗粒消耗率为

$$-\bar{\rho}_p \frac{dr}{dt} = bk_i \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty} + C_{A\infty}}{1 + K_E} \right) = bk_i \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) \frac{K_E}{1 + K_E} \quad (5-38)$$

量纲分析表明

$$Sh = \frac{k_i r_0}{D} = F(S_r, R_e)$$

对于单个颗粒

$$Sh = 1 - A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中  $A = A_0 S_r^{\frac{1}{2}} R_e^{\frac{1}{2}}$ ,  $A_0$  为常数。

$$\text{即} \quad k_i = \frac{D}{r} \left( 1 + A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5-39)$$

代入(5-38)式得

$$-\bar{\rho}_p \frac{dr}{dt} = \frac{K_E b}{1 + K_E} \frac{D}{r} \left( 1 + A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)$$

$$\text{令} \quad \xi = \frac{r}{r_0}, t^+ = \frac{2bD}{\rho_p r_0^2} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) \left( \frac{K_E}{1 + K_E} \right) t$$

$$\frac{d\xi}{dt^+} = -\frac{1}{2} (1 + A\xi^{\frac{1}{2}}) / \xi$$

初始条件为  $t^+ = 0$  时  $\xi = 1$

其解为

$$t^+ = \frac{4}{3A} (1 - \xi^{\frac{3}{2}}) - \frac{2}{A^2} (1 - \xi) + \frac{4}{A^3} (1 - \xi^{\frac{1}{2}})$$

$$- \frac{4}{A^4} \ln \left( \frac{1 + A}{1 + A\xi^{\frac{1}{2}}} \right) = q(\xi) \quad (5-40)$$

静止气体  $R_e = 0, A = 0$ , 应用 LHopital 法则

$$t^+ = 1 - \xi^2 = 1 - (1 - X)^{\frac{2}{f}} = P_f(X) \quad (5-41)$$

$t^+ = 1$  时颗粒完全反应

$$t_b = \frac{\bar{\rho}_p r_0^2}{2bD \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) \left( \frac{K_E}{1 + K_E} \right)} \quad (5-42)$$

即

$$t^+ = \frac{t}{t_b}$$

### 三、化学反应和质量传递共同控制

界面反应速率与质量传递速率相近时,燃烧过程没有控制步骤,必须同时考虑界面反应和质量传递对颗粒气化的影响。

设反应过程定常,即反应速率等于质量传递速率

$$-\frac{\bar{\rho}_p}{b} \frac{dr}{dt} = k_1 \left( C_{AS} - \frac{C_{CS}}{K_E} \right) = k_l (C_{A\infty} - C_{AS}) = k_l (C_{CS} - C_{C\infty})$$

于是

$$-\frac{\bar{\rho}_p}{b} \frac{dr}{dt} = \frac{k_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)}{1 + k_1 \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right) / k_l} \quad (5-43)$$

引进无量纲量  $\xi = \frac{r}{r_0}$ ,  $\bar{i} = \frac{bk_1}{\bar{\rho}_p r_0} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{A\infty}}{K_E} \right) t$ , 方程(5-43)写成

$$\frac{d\bar{i}}{d\xi} = - \left[ 1 + \frac{k_1 \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right)}{k_l} \right]$$

由(5-39)式得

$$\frac{d\bar{i}}{d\xi} = - \left[ 1 + \frac{2\sigma_0^2 \xi}{1 + A\xi^{\frac{1}{2}}} \right]$$

其中  $\sigma_0^2 = \frac{k_1 r_0 \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right)}{2D}$ 。

初始条件为  $\bar{i}=0$  时,  $\xi=1$ , 有解

$$\begin{aligned} \bar{i} &= (1 - \xi) + \sigma_0^2 q(\xi) = \\ g_f(X) + \sigma_0^2 g_f(X) &= t^* + t^+ \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (5-44)$$

该式表明反应达到一定转换分数  $X$  所需的时间  $\bar{i}$  包含两部分, 无质量传递阻力时达到  $X$  所需的时间  $t^*$  和扩散控制时达到  $X$  所需的时间  $t^+$  与常数  $\sigma_0^2$  的乘积。

静止气体中

$$\bar{i} = g_f(X) + \sigma_0^2 P_f(X) \quad (5-45)$$

当  $\sigma_0$  很小时, 即  $D \gg k_1$ , 质量扩散速率远大于化学反应速率, 上式简化为

$$\bar{t} = t^* = g_f(X)$$

当  $\sigma_0$  很大时, 即  $D \ll k_1$ , 质量扩散速率远小于化学反应速率, 简化为

$$\bar{t} = \sigma_0^2 g_f(X)$$

即

$$t^+ = q(\xi)$$

### 5.3.2 缩核模型<sup>[7]</sup>

颗粒燃烧过程中若有固体产物沉积, 其表面将形成灰分层, 反应方程为



此时颗粒分为两部分, 即未反应的中心部分(称为内核)和外部灰分层。反应发生在内核和灰分层的界面上, 经过如下步骤: (1)氧化性气体从主气流扩散到灰分层表面; (2)氧化性气体经灰分层孔隙扩散到内核表面; (3)内核表面发生化学反应; (4)固态产物沉积后产生新的灰分层, 气态产物经由灰分向外表面扩散; (5)气态产物向主气流扩散。

描述此燃烧过程的缩核模型假设燃烧过程中颗粒大小不变, 与灰分层相比主气流中的质量扩散可以忽略, 于是影响和决定气化速率的因素主要是灰分层内的扩散和内核界面的化学反应。

#### 一、化学反应控制

当内核界面反应是整体反应的控制步骤时,  $C_{AS} = C_{A\infty}$ , 反应过程与缩球模型相同

$$t^* = \frac{t}{t_0} g_f(X)$$

其中  $t_0 = \frac{\bar{\rho}_f r_0}{bk_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_g} \right)}$ ,  $r_0$  表示包括灰分在内的颗粒半径。

## 二、灰分层内质量扩散控制

当灰分层的扩散为整体反应的控制步骤时,设灰分层内气体组分定常,有  $C_A + C_c = \text{常数}$ , 对于球形颗粒,有组元守恒方程

$$-4\pi r^2 D_c \frac{dC_A}{dr} = 4\pi r^2 D_c \cdot \frac{dC_c}{dr} = K \quad (5-46)$$

其中  $K$  为常数。

方程的边界条件为

$$r = r_0 \text{ 时} \quad C_A = C_{A\infty}, C_c = C_{c\infty}$$

$$r = r_c \text{ 时} \quad C_{Ac} = \frac{C_{cc}}{K_E}$$

脚标  $c$  表示内核界面,该处化学反应处于平衡状态,  $r_c$  表示内核半径。

方程有解,即

$$4\pi r^2 b D_c \frac{dC_A}{dr} = \frac{4\pi b D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{c\infty}}{K_E} \right) \frac{K_E}{1 + K_E} \quad (5-47)$$

$$\text{颗粒消耗率为 } \dot{m}_r = 4\pi r_c^2 b D_c \frac{dC_A}{dr} \Big|_{r=r_c} = -4\pi r_c^2 \rho_r \frac{dr_c}{dt}$$

根据(5-47)式得

$$4\pi r_c^2 b D_c \frac{dC_A}{dr} \Big|_{r=r_c} = \frac{4\pi b D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{c\infty}}{K_E} \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

$$\text{故} \quad -r_c^2 \rho_r \frac{dr_c}{dt} = \frac{D_c b}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{c\infty}}{K_E} \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

引进无量纲量  $\xi_c = \frac{r}{r_0}$

$$(\xi_c - \xi_c^2) \frac{d\xi_c}{dt} = \frac{-b D_c}{\rho_r r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{c\infty}}{K_E} \right) \quad (5-48)$$

当  $t=0$  时,  $\xi_c=1$ , 故

$$1 - 3\xi_c^2 + 2\xi_c^3 = \frac{6b D_c}{\rho_r r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{c\infty}}{K_E} \right) t$$

由于  $X=1-\xi_c^2$ , 故

$$1 - 3(1 - X)^{\frac{2}{3}} + 2(1 - X) = \frac{6bD_c}{\rho_p r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) t$$

$$\text{令} \quad t^+ = \frac{6bD_c}{\rho_p r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) t$$

$$\text{有} \quad t^+ = 1 - 3(1 - X)^{\frac{2}{3}} + 2(1 - X) = P(X) \quad (5-49)$$

### 三、化学反应和扩散共同控制

化学反应控制时

$$t^* = \frac{t}{t_0} = \frac{bk_1 \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right)}{\rho_p r_0} t = g(X)$$

如果气体通过灰分层的扩散速率与界面反应速率相近,考虑灰分层的扩散,上式写成

$$t^* = \frac{bk_1 \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right)}{\rho_p r_0} t = g(X)$$

$$\text{即} \quad \frac{dX}{dt} = \frac{bk_1 \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right)}{\rho_p r_0 g'(X)} \quad (5-50)$$

设灰分层内流场定场

$$-4\pi r^2 D_c \frac{dC_A}{dr} = 4\pi r^2 D_c \frac{dC_c}{dr} = K$$

其边界条件为

$$r=r_0 \text{ 时} \quad C_A=C_{A\infty}, C_c=C_{C\infty}$$

$$r=r_c \text{ 时} \quad C_A=C_{AC}, C_c=C_{CC}$$

于是

$$K = \frac{-4\pi D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

$$4\pi r^2 b D_c \frac{dC_A}{dr} = \frac{4\pi b D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

在  $r=r_c$  处

$$4\pi r_c^2 b D_c \left. \frac{dC_A}{dr} \right|_{r=r_c} = \frac{4\pi b D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

颗粒消耗率为

$$\dot{m}_p = \frac{4\pi b D_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

$$\text{即} -\rho_p \frac{dr_c}{dt} = \frac{b D_c}{\left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0} \right)} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{K_E}{1 + K_E}$$

引进无量纲量  $\xi_c = \frac{r_c}{r_0}$

$$(\xi_c - \xi_c^2) \frac{d\xi_c}{dt} = -\frac{b}{\rho_p} \frac{D_c}{r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right)$$

当  $t=0$  时,  $\xi_c=1$

$$1 - \xi_c^2 + 2\xi_c^3 = \frac{6b D_c}{\rho_p r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) t$$

对于球形颗粒  $X=1-\xi_c^3$ , 故

$$1 - 3(1-X)^{\frac{2}{3}} + 2(1-X) = P(X) = t^+ = \frac{6b D_c}{\rho_p r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) t$$

微分此式

$$\frac{dX}{dt} = \frac{6b D_c}{\rho_p r_0^2} \frac{K_E}{1 + K_E} \left( \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) - \left( C_{AC} - \frac{C_{CC}}{K_E} \right) \right) \frac{1}{P'(X)} \quad (5-51)$$

比较(5-50)式和(5-51)式得

$$\frac{C_{AC} - C_{CC}/K_E}{C_{A\infty} - C_{C\infty}/K_E} = \frac{g'(X)}{\frac{k_1 r_0}{6D_c} \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right) P'(X) + g'(X)} \quad (5-52)$$

其中  $P(X) = 1 - 3(1-X)^{\frac{2}{3}} + 2(1-X)$

$$g(X) = 1 - (1-X)^{\frac{1}{3}}$$

当  $X=0$  时

$$P(X)=0, g(X)=0$$



将(5-52)式代入(5-50)式得

$$\frac{k_1 r_0}{6D_c} \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right) P'(X) dX + g'(X) dX =$$

$$\frac{bk_1}{\rho_p r_0} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_E} \right) dt = d\bar{t}$$

当  $\bar{t}=0$  时  $X=0, P(X)=0, g(X)=0$

故  $\bar{t} = \frac{k_1 r_0}{6D_c} \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right) P(X) + g(X)$

令  $\sigma_0^2 = \frac{k_1 r_0}{6D_c} \left( 1 + \frac{1}{K_E} \right)$

$$\bar{t} = \sigma_0^2 P(X) + g(X) = t^* + \sigma_0^2 t^+ \quad (5-53)$$

该式表明,由界面化学反应和灰分层扩散共同控制的反应过程达到一定转换分数  $X$  所需的时间包括两部分,即忽略灰分层扩散达到  $X$  所需的时间  $t^*$  和仅考虑灰分层扩散达到  $X$  所需的时间  $t^+$  与特征常数  $\sigma_0^2$  的乘积。

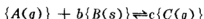
当  $\sigma_0^2$  很小时,  $D_c \gg k_1$ , 灰分层内的扩散速率远大于界面化学反应速率,有  $\bar{t} = g(X) = t^*$  即化学反应控制过程。

当  $\sigma_0^2$  很大时,  $k_1 \gg D_c$ , 界面化学反应速率大于灰分层内的扩散速率,此时  $\bar{t} = \sigma_0^2 t^+$ , 即灰分层内质量扩散控制过程。

## 5.4 多孔颗粒燃烧

### 5.4.1 全气化模型

固体燃料颗粒多孔时,气体氧化剂可能向颗粒内部扩散,所及之处皆可发生化学反应。当燃烧产物全为气相时,有化学反应方程



多孔颗粒的燃烧根据其温度分为三类<sup>[7,8]</sup>,如图 5-6 所示。

(1) 颗粒温度较低时,固体的化学活性较低,氧化性气体可以通过孔隙渗透到颗粒内部,以较低的速率在壁面反应,致使孔隙不断扩大。

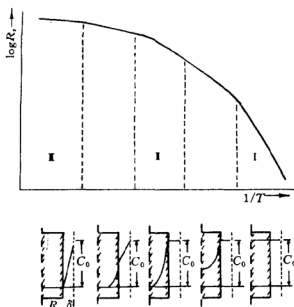


图 5-6 多孔颗粒全气化燃烧的分区

(2) 颗粒温度较高时, 化学活性也较高, 气体氧化剂向颗粒内部渗透时常因高速反应而中途耗尽, 燃烧主要发生在颗粒外层。

(3) 高温时, 颗粒化学活性很大以致气体氧化剂仅在颗粒外表面反应, 不能向颗粒内部渗透。

因此, 燃烧过程中随颗粒温度的升高, 反应类型将发生转化。各反应区所对应的温度与颗粒孔隙度、孔内扩散系数、颗粒大小、反应活化能等有关。

### 一、扩孔模型<sup>[9]</sup>

颗粒温度较低时, 气体可以扩散到颗粒内部, 充满整个孔隙。孔壁发生的反应使孔隙不断扩大。Petersen 提出一种简化模型(称为扩孔模型), 该模型假设颗粒孔隙由截面相等、随意交叉的圆柱孔构成, 如图 5-7 所示。反应过程中颗粒大小不变, 孔径均匀扩大。用圆柱孔中心轴线的长度之和表示颗粒孔隙的总长度

$$L = ab + bc + cf + cd + ad + de + ef + \dots$$

颗粒的比表面积可写成

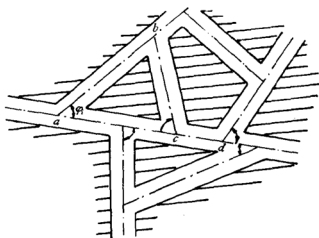


图 5-7 扩孔模型的孔结构

$$S_v = 2\pi r \left( L - r \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin \varphi_i} \right) - r^2 \sum_{i=1}^n \beta(\varphi_i) \quad (5-54)$$

其中  $r$  表示孔径,  $n$  表示单位体积中心轴线的交点数,  $\varphi_i$  为中心线交角。式中  $r \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin \varphi_i}$  是对孔长的修正,  $r^2 \sum_{i=1}^n \beta(\varphi_i)$  是对孔隙交接处表面积变化的修正。

如果反应过程中, 没有新孔隙产生, 交点数  $n$  和孔隙夹角  $\varphi_i$  应为常数, 故

$$S_v = 2\pi r L - K r^2$$

其中  $K$  为常数, 与孔隙接头数  $n$  和孔隙夹角  $\varphi_i$  有关。

记  $S_v = 2\pi r L'$ ,  $L'$  称为等效孔隙长度, 根据孔隙度  $\varepsilon$  的定义

$$\frac{d\varepsilon}{dr} = 2\pi r L' = 2\pi r L - K r^2$$

该方程应满足  $r=0$  时  $\varepsilon=0$ , 故

$$\varepsilon = \frac{K r_0^3}{3} S^2 (G - S) \quad (5-55)$$

其中  $S = \frac{r}{r_0}$ ,  $r_0$  为初始孔径,  $G = \frac{2\pi L}{K r_0}$  为反映颗粒孔隙结构的特征常数。

由于  $S=1$  时  $\varepsilon=\varepsilon_0$

$$\varepsilon_0 = \frac{Kr_0^3}{3}(G-1)$$

$$\text{或} \quad G = \frac{3\varepsilon_0}{Kr_0^3} + 1 \quad (5-56)$$

于是, (5-55)式可写成

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = S^2 \left( \frac{G-S}{G-1} \right) \quad (5-57)$$

$$\text{或} \quad \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{\varepsilon_0}{r_0} \frac{(2G-3S)S}{G-1}$$

$$\text{从而有} \quad S_r = \frac{\varepsilon_0}{r_0} \frac{(2G-3S)S}{G-1} \quad (5-58)$$

由于  $\varepsilon=1$  时  $S_r=0$ , 故

$$2G-3S=0$$

代入(5-57)式得

$$1-G+\frac{4}{27}\varepsilon_0 G^3=0 \quad (5-59)$$

由(5-56)式、(5-58)式和(5-59)式可求得  $S_r=S_r(S)$  或  $S_r=S_r(r)$ , 即比表面积与孔径的关系。

由于孔表面的反应速率很低, 整体反应由化学反应步骤控制, 假设孔内气体浓度均匀且等于颗粒表面浓度, 即  $C_A=C_{A\infty}$ 。当表面反应为  $m$  级不可逆反应时, 即  $R_N=\bar{k}C_{A\infty}^m$  时

$$\frac{dr}{dt} = \frac{b}{\rho_r} \bar{k} C_{A\infty}^m$$

$$\text{或} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{b\bar{k}}{r_0\rho_r} C_{A\infty}^m$$

其初始条件为  $t=0$  时,  $S=1$ , 方程有解

$$S = 1 + \frac{t}{\tau_c} \quad (5-60)$$

其中  $\tau_c = \frac{r_0\rho_r}{b\bar{k}C_{A\infty}^m}$ 。根据转换分数定义

$$X = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau_c} \right)^2 \left( \frac{G-1-\frac{t}{\tau_c}}{G-1} \right) - 1 \right] \quad (5-61)$$

单位体积的颗粒化学反应速率为

$$R = S_r \bar{k} C_{A\infty}^m = \bar{k} \frac{\varepsilon_0}{r_0} \frac{(2G - 3 \left(1 + \frac{t}{\tau_c}\right))}{G - 1} \left(1 + \frac{t}{\tau_c}\right) C_{A\infty}^m \quad (5-62)$$

## 二、缩球模型<sup>[7]</sup>

反应温度较高时,表面反应速率比较大,此时气体不能进入颗粒内核,仅在外层发生反应。其速率决定于孔内扩散速率。颗粒分为未反应的内核和正在反应的外壳,颗粒直径因反应而不断缩小。缩球模型假设:(1)颗粒内有效扩散系数  $D_e$  和比表面积  $S_r$  是常数;(2)反应区内流场定常;(3)表面反应为  $m$  级不可逆的反应,如

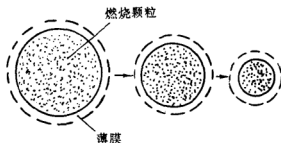


图 5-8 多孔颗粒缩球反应模型

图 5-8 所示。颗粒内组元守恒方程

$$D_e \nabla^2 C_A - \bar{k} S_r C_A^m = 0$$

如果反应相当快,反应区非常薄,视作一维平面问题

$$D_e \frac{d^2 C_A}{dx^2} - \bar{k} S_r C_A^m = 0 \quad (5-63)$$

边界条件为

$$x=0 \text{ 时} \quad C_A = C_{As} \quad (\text{颗粒表面})$$

$$x=\infty \text{ 时} \quad C_A = \frac{dC_A}{dx} = 0 \quad (\text{颗粒中心})$$

令

$$P = \frac{dC_A}{dx}$$

$$D_e P \frac{dP}{dC_A} = \bar{k} S_r C_A^m$$

即 
$$\frac{P^2}{2} - \frac{\bar{k}S_v C_A^{m+1}}{(m+1)D_e} = \text{常数}$$

由边界条件

$$\frac{dC_A}{dx} = - \left( \frac{2}{m+1} \frac{\bar{k}S_v}{D_e} C_A^{m+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

颗粒单位表面积的反应速率为

$$R_{es} = - D_e \frac{dC_A}{dx} \Big|_{x=0} = k' C_{AS}^{\frac{m+1}{2}} \quad (5-64)$$

其中  $k' = \left( \frac{2}{m+1} \bar{k}S_v D_e \right)^{\frac{1}{2}}$ 。此时,多孔颗粒的反应可视为反应速率常数为  $k'$ ,反应级数为  $\frac{m+1}{2}$  的无孔颗粒的反应。

如果颗粒孔隙度较小,外表面积的化学反应不可忽略

$$R_{es} = \left( \frac{2}{m+1} \bar{k}S_v D_e \right)^{\frac{1}{2}} C_{AS}^{\frac{m+1}{2}} + \bar{k}f_r C_{AS}^m$$

其中  $f_r$  为颗粒外表面的粗糙度,定义为

$$f_r = \frac{\text{实际颗粒外表面积}}{\text{理想光滑的颗粒外表面积}}$$

当  $m=1$  时

$$R_{es} = k' C_{AE}$$

其中  $k' = (\bar{k}S_v D_e)^{\frac{1}{2}} + \bar{k}f_r$ 。

对于外部质量传递和孔内扩散共同控制的过程

$$k' C_{AE} = k_i (C_{A\infty} - C_{AS})$$

即

$$k' C_{AS} = \frac{C_{A\infty}}{((\bar{k}S_v D_e)^{\frac{1}{2}} + \bar{k}f_r)^{-1} + k_i^{-1}}$$

由于  $-\frac{\bar{\rho}_r}{b} \frac{dr}{dt} = k' C_{AS}$

$$-\frac{\bar{\rho}_r}{b} \frac{dr}{dt} = \frac{C_{A\infty}}{((\bar{k}S_v D_e)^{\frac{1}{2}} + \bar{k}f_r)^{-1} + k_i^{-1}} \quad (5-65)$$

如果外部质量传递过程很快,孔内扩散为控制步骤时,即  $k_i \gg k'$

$$-\frac{\bar{\rho}_r}{b} \frac{dr}{dt} = ((\bar{k}S_v D_e)^{\frac{1}{2}} + \bar{k}f_r) C_{A\infty} \quad (5-66)$$

当颗粒孔隙度很大,  $\sqrt{\bar{k}S_p D_r} \gg \bar{k}f$ , 时

$$-\frac{\bar{\rho}_p}{b} \frac{dr}{dt} = (\bar{k}S_p D_r)^{\frac{1}{2}} C_{A\infty} \quad (5-67)$$

当颗粒孔隙度很小,  $\bar{k}f \gg \sqrt{\bar{k}S_p D_r}$  时, 相当于无孔颗粒

$$-\frac{\bar{\rho}_p}{b} \frac{dr}{dt} = \bar{k}f C_{A\infty} \quad (5-68)$$

如果外部质量传递过程为控制步骤,  $k' \gg k_l$

$$-\frac{\bar{\rho}_p}{b} \frac{dr}{dt} = k_l C_{A\infty} \quad (5-69)$$

### 5.4.2 非全气化模型<sup>[10,11]</sup>

若颗粒燃烧后有固态产物生成, 则

$$\{A(g)\} + b\{B(s)\} = c\{C(g)\} + d\{D(s)\}$$

颗粒体积因反应可能增加也可能减少, 这决定于固体产物的密度。

无孔颗粒的缩核反应一开始就出现灰分层, 然后逐渐加厚, 灰分层内的气体扩散和内核界面上的反应是两个串联的独立进行的基元过程。多孔颗粒则不同, 扩散与反应同时进行, 形成完全燃烧的灰分层外壳需要一定的时间。

Sohn 等提出微细颗粒模型, 假设多孔颗粒由无数大小相同、分布均匀的无孔微细颗粒组成, 如图 5-9 所示。燃烧时, 微细颗粒的转换分数为

$$X_s = 1 - \left( \frac{r_c}{r_p} \right)^3 = 1 - \xi^3$$

其中  $r_c$  和  $r_p$  分别表示微细颗粒半径和其中的火焰半径。于是, 内径为  $R$ , 厚度为  $dR$  的球壳内已反应部分的体积为  $4\pi R^2 X_s dR$ 。多孔颗粒的转换分数  $X_s$  应写成

$$X_s = \frac{\int_0^{r_p} 4\pi R^2 X_s dR}{\int_0^{r_p} 4\pi R^2 dR} = 3 \int_0^1 \eta^2 X_s d\eta \quad (5-70)$$

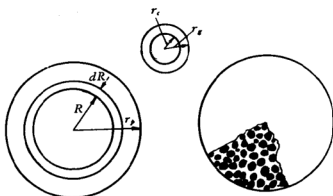


图 5-9 微细颗粒模型表示的多孔介质燃烧

其中  $\eta = \frac{R}{r_s}$ ,  $r_s$  为多孔颗粒半径,  $X_g = X_g(R)$  是  $R$  的函数。

### 一、化学反应控制

多孔颗粒视作无数无孔微细颗粒构成, 氧化性气体由主气流扩散到颗粒外表面, 经由微细颗粒间的孔隙向内部渗透。如果这类扩散速率较大, 单个微细颗粒的界面反应将是整体反应的决定步骤, 如图 5-10 所示。此时, 所有无孔微细颗粒在相同环境下燃烧, 其转换分数相同, 即

$$X_g = X_g \quad (5-71)$$

采用无孔颗粒的缩核模型

$$\dot{i} = g_g(X_g) + \sigma_g^2 P_g(X_g) \quad (5-72)$$

其中  $g_g(X_g) = 1 - (1 - X_g)^{\frac{1}{3}}$

$$P_g(X_g) = 1 - 3(1 - X_g)^{\frac{2}{3}} + 2(1 - X_g)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{k_1 r_s}{2D_g} \left( 1 + \frac{1}{K_s} \right)$$

式中  $D_g$  为微细颗粒灰分层内的有效扩散系数, 脚标  $g$  表示微细颗粒。

将(5-71)式代入(5-72)式得

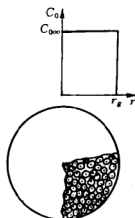


图 5-10 化学反应控制的多孔颗粒燃烧



$$\bar{t} = g_p(X_p) + \sigma_q^2 P_q(X_p) \quad (5-73)$$

当  $\sigma_p$  很小时, 即微细颗粒灰分层扩散可以忽略时

$$t^* = 1 - (1 - X_p)^{\frac{1}{3}} \quad (5-74)$$

## 二、灰分层内的质量扩散控制

如果界面反应速率很大, 微细颗粒完全燃烧所需的时间较气体在其间扩散所需时间小得多, 多孔颗粒将由未反应的内核和已反应的灰分层构成, 气体在灰分层内的扩散为整体反应的控制步骤, 如图 5-11 所示。

类似于无孔颗粒缩核反应, 由 (5-49) 式得

$$t^+ = \frac{6bD_e}{\rho_p r_p^2} \left( C_{A\infty} - \frac{C_{C\infty}}{K_R} \right) \frac{K_R}{1 + K_R} t = P_r(X_p) \quad (5-75)$$

其中  $P_r(X_p) = 1 - 3(1 - X_p)^{\frac{2}{3}} + 2(1 - X_p)$ ,  $X_p$ ,  $= 1 - \left( \frac{R_c}{r_p} \right)^3$ ,  $R_c$  为未反应内核的半径。

## 三、化学反应和孔内扩散共同控制<sup>[12, 13]</sup>

当化学反应与孔内扩散共同控制整体反应时, 须考虑两者的相互影响。仍基于微细颗粒模型, 假设:

- (1) 燃烧过程中多孔颗粒的大小不变, 结构不变;
- (2) 忽略孔内的粘性, 设氧化剂和气体燃烧产物的扩散速率相等, 孔内气体定常, 温度分布均匀;
- (3) 忽略主气流的输运效应;
- (4) 微细颗粒燃烧受化学反应控制。

颗粒内组元守恒方程为

$$\frac{D_e}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dC_A}{dR} \right) - \dot{w}_A = 0$$

$$\frac{D_e}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dC_c}{dR} \right) - \dot{w}_A = 0$$

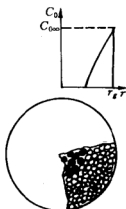


图 5-11 灰分层内质量扩散控制的多孔颗粒燃烧

$$\text{或} \quad \frac{D_e}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d \left( C_A - \frac{C_c}{K_g} \right)}{dR} \right) - \dot{w}_A \left( 1 + \frac{1}{K_g} \right) = 0 \quad (5-76)$$

其中  $\dot{w}_A$  表示单位体积的多孔颗粒, 组分  $A$  的当地消耗率。对于一级可逆反应

$$\dot{w}_A = 4\pi r_c^2 k_1 \left( C_A - \frac{C_c}{K_g} \right) n$$

其中  $n = \frac{1-\varepsilon}{\frac{4}{3}\pi r_g^3}$  为多孔颗粒中微细颗粒的数密度。

故(5-76)式可写成

$$\begin{aligned} \frac{D_e}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d \left( C_A - \frac{C_c}{K_g} \right)}{dR} \right) - \frac{3(1-\varepsilon)}{r_g} \left( \frac{r_c}{r_g} \right)^2 \times \\ k_1 \left( C_A - \frac{C_c}{K_g} \right) \left( 1 + \frac{1}{K_g} \right) = 0 \end{aligned}$$

引进下述无量纲量

$$\varphi = \frac{C_A - \frac{C_c}{K_g}}{C_{AS} - \frac{C_{CS}}{K_g}}, \quad \text{脚标 } S \text{ 表示多孔颗粒外表面}$$

$$\xi = \frac{r_c}{r_g}$$

$$\eta = \frac{R}{r_g}$$

$$t^* = \frac{bk_1}{\rho_s r_g} \left( C_{AS} - \frac{C_{CS}}{K_g} \right) t$$

$$\sigma = r_g \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)k_1}{D_e} \frac{3}{r_g} \left( 1 + \frac{1}{K_g} \right)}$$

于是

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \right) - \sigma^2 \varphi \xi^2 = 0 \quad (5-77)$$

对于微细颗粒

$$-\bar{\rho}_t \frac{\partial r_t}{\partial t} = bk_1 \left( C_A - \frac{C_c}{K_g} \right)$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t^*} = -\varphi \quad (5-78)$$

上述方程的初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} t^* = 0 \text{ 时, 对于所有 } \eta & \quad \xi = 1 \\ \eta = 1 \text{ 时, 对于所有 } t^* \geq 0 & \quad \varphi = 1 \\ \eta = 0 \text{ 时, 对于所有 } t^* \geq 0 & \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

由(5-70)式得

$$\frac{dX_r}{dt^*} = -9 \int_0^1 \eta^2 \xi^2 \frac{d\xi}{dt^*} d\eta$$

由(5-78)式得

$$\frac{dX_r}{dt^*} = 9 \int_0^1 \eta^2 \xi^2 \varphi d\eta$$

对于定常过程, 颗粒反应速率等于表面处气体氧化的扩散流率

$$\frac{(1-\varepsilon)\bar{\rho}_t}{b} \frac{4}{3}\pi r_p^3 \frac{dX_r}{dt} = D_e 4\pi r_p^2 \frac{dC_A}{dR} \Big|_{R=r_p}$$

$$\text{即} \quad \frac{dX_r}{dt^*} = \frac{9}{\sigma^2} \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{\eta=1} \quad (5-79)$$

上述方程可求数值解, Evans<sup>[14]</sup>对此进行了详尽讨论。

## 5.5 颗粒的气相燃烧

### 5.5.1 含挥发分的颗粒燃烧

#### 一、挥发速率

大部分有机颗粒如煤粉在燃烧时因组分热解而生成挥发气体。类似于液滴燃烧, 可燃挥发气体逸出后与氧化性气体混合在气相燃烧。若用一级反应描述逸出速率<sup>[15]</sup>, 则

$$\frac{dY_r}{dt} = \bar{k}_r (Y_r^0 - Y_r) \quad (5-80)$$

其中  $Y_r$  表示已逸出部分在原始颗粒中的质量分数,  $Y_r^0$  表示  $t \rightarrow \infty$  时的  $Y_r$ , 即有效总挥发分在原始颗粒中的质量分数。 $\bar{k}_r$  为挥发速率常数, 若用 Arrhenius 公式

$$\bar{k}_r = A e^{-E_r/RT}$$

由此获得的计算结果往往与实验差别很大。Pitt<sup>[18]</sup>认为分解反应包含许多平行反应

$$\frac{dY_{ri}}{dt} = k_i (Y_{ri}^0 - Y_{ri}) = A \exp(-E_{ri}/RT) (Y_{ri}^0 - Y_{ri}) \quad (5-81)$$

或写成 
$$\frac{Y_{ri}^0 - Y_{ri}}{Y_{ri}^0} = \exp\left(-\int_0^t k_i dt\right) \quad (5-82)$$

对于频率因子相同的许多平行反应, 设分解活化能  $E_{ri}$  的分布函数为  $f(E_r)$ , 上式写成

$$\frac{Y_{ri}^0 - Y_{ri}}{Y_{ri}^0} = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \bar{k}_r dt\right) f(E_r) dE_r$$

若为 Gaussian 分布

$$f(E_r) = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{(E_r - E_{r0})^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中  $E_{r0}$  为平均值,  $\sigma$  为均方差。若均匀分布

$$f(E_r) = \frac{1}{E_{\max} - E_{\min}}$$

方程(5-81)可写成

$$\frac{dY_r}{dt} = A \exp(-E/RT) (Y_r^0 - Y_r) \quad (5-83)$$

其中  $E = E_{\max} - \alpha(Y_r^0 - Y_r)$ ,  $\alpha = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{Y_r^0}$ 。

## 二、挥发面模型

单位颗粒表面挥发分逸出速率为

$$G_r = \frac{\dot{m}_{r0}}{4\pi r_0^2} \quad (5-84)$$

其中  $r_0$  为颗粒半径,  $\dot{m}_{r0}$  为颗粒外表面挥发分的逸出速率。

与特征半径  $r_{np}$  对应的球面上, 逸出率  $\dot{m}_{vnp}$  满足  $\dot{m}_{vnp} = \frac{1}{2} \dot{m}_{v0}$ 。挥发面模型假设组分热解仅发生在  $r = r_{np}$  的球面上, 逸出速率为  $\dot{m}_{v0}$ , 于是  $r < r_{np}$  区域, 能量守恒方程为

$$\rho_p C \frac{\partial T_p}{\partial t} = k \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T_p}{\partial r} \right) \quad (5-85)$$

$r_{np} < r < r_0$  区域, 能量守恒方程为

$$\rho_{ch} C_{ch} \frac{\partial T_p}{\partial t} + C_v G_v \frac{\partial T_p}{\partial t} = k_{ch} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T_p}{\partial r} \right) \quad (5-86)$$

其中脚标  $ch$  表示失去挥发分的颗粒残渣,  $v$  表示挥发分。

方程的边界条件为

$$r = 0 \text{ 时} \quad \frac{\partial T_p}{\partial r} = 0 \quad (5-87)$$

$$r = r_{np} \text{ 时} \quad -k \frac{\partial T_p}{\partial r} = -k_{ch} \frac{\partial T_p}{\partial r} - G_v \Delta h_i \quad (5-88)$$

其中  $\Delta h_i$  为生成单位质量的挥发分所需的分解热。

设颗粒周围是厚度为  $\delta$  的薄膜 ( $\delta \ll r_0$ ), 气相化学反应主要在薄膜内进行, 质量守恒方程为

$$\dot{m}_{v0} - \dot{m}_{v\delta} - \bar{k} \rho_g Y_{v\delta} A_p \delta = A_p \frac{d(\rho_g Y_{v\delta} \delta)}{dt} \quad (5-89)$$

其中  $\dot{m}_{v\delta}$  为挥发分逸出薄膜外侧的速率,  $\bar{k}$  为化学反应速率常数,  $\rho_g$  为薄膜内混合气体的密度,  $Y_{v\delta}$  为挥发分在混合物中的质量分数,  $A_p = 4\pi r_0^2$ 。

由于  $\delta$  很小, 上式近似写成

$$\dot{m}_{v0} - \dot{m}_{v\delta} = A_p K_c$$

令  $f_{rc} = \frac{\dot{m}_{v0} - \dot{m}_{v\delta}}{\dot{m}_{v0}} = \frac{A_p K_c}{\dot{m}_{v0} + A_p K_c}$ , 为防止  $f_{rc} > 1$ , 分母中加入  $A_p K_c$ ,  $K_c$  可写成 Arrhenius 函数形式。薄膜内的能量守恒方程为

$$q = \dot{m}_{v0} f_{rc} \Delta h_c + \dot{m}_{v0} (h_{g0} - h_{g\delta}) (1 - f_{rc}) + F_c \quad (5-90)$$

其中  $q$  表示传递给颗粒的热流密度,  $\Delta h_c$  为单质量的挥发分燃烧释放的热,  $h_{g0}$  和  $h_{g\delta}$  分别表示  $r = r_0$  和  $r = r_0 + \delta$  处气体混合物的焓, 对于气体应分别为  $C_p T_{ps}$  和  $C_p T_s$ ,  $T_{ps}$  为颗粒表面温度,  $T_s$  表示薄膜外

层的温度。 $F_c = h_f(T_f - T_p)$ 为气体与颗粒间的对流传热,  $h_f$  为薄膜热传递系数,  $T_f$  为火焰温度。

$$\text{当 } r = r_0 \text{ 时} \quad q = k_{ch} \frac{\partial T_f}{\partial r}$$

## 5.5.2 金属颗粒燃烧

金属颗粒燃烧时常因熔点低于火焰温度而熔化, 反应发生在金属蒸气与氧化性气体之间。燃烧产物中, 金属氧化物因具有较高的熔点而以凝聚态存在。金属颗粒的燃烧机制特别是氧化产物的凝聚机制是很复杂的, 与颗粒种类、大小以及环境等因素有关。Markstein 认为<sup>[17]</sup>  $T_{bm} < T_r \leq T_{bo}$  时, 金属颗粒燃烧如图 5-12 所示, 其中  $T_{bm}$  为金属沸点,  $T_r$  为反应区温度,  $T_{bo}$  为金属氧化物的沸点。

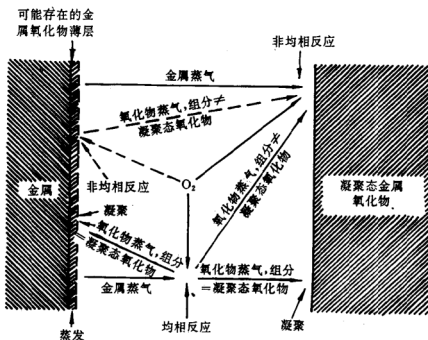
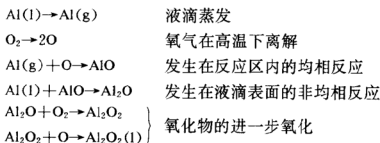


图 5-12 金属颗粒燃烧示意图

熔化的金属液滴被凝聚态金属氧化物所覆盖, 透过覆盖层进入反应区的金属蒸气与气相氧化剂反应, 由此生成的金属氧化物

一部分扩散至液滴表面沉积在覆盖层上,另一部分在图中 2 区形成颗粒悬浮云。铝粒和镁粒的燃烧皆可用这种机理来描述<sup>[18,19]</sup>。如果金属具有不同的价态,液滴表面和颗粒云中还会继续进行非均相反应,如铝粉燃烧有如下步骤<sup>[18]</sup>



本节仅介绍 Law 提出的模型<sup>[20]</sup>,如图 5-13 所示。该模型假设:

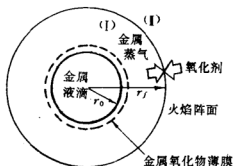
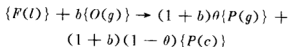


图 5-13 Law 模型示意图

(1) 金属蒸气与氧化性气体按反应方程所需比例分别从图中 (I) 区和 (II) 区进入火焰阵面并以无限大的速率反应,火焰阵面厚度为零。液态金属的蒸发速率及覆盖层内的扩散速率足够大,因此 (I) 区和 (II) 区的质量扩散和能量传递是燃烧过程的控制步骤。

(2) 化学反应方程为



即火焰阵面的燃烧产物中,质量分数为  $\theta$  的部分为气态,用脚标  $g$

表示,  $(1-\theta)$  的部分为凝聚态, 用脚标  $c$  表示。气态产物中, 质量分数为  $\eta$  的部分向液滴表面扩散, 并在覆盖层上以无限大的速率凝聚。其余  $(1-\eta)$  的部分向主气流扩散并于无穷远处凝聚。凝聚态产物只有宏观流动, 忽略其扩散效应。

(3) 火焰阵面燃烧释放的热和液滴表面凝聚释放的热皆用于液滴的蒸发和加热燃料蒸气和氧化性气体, 液滴温度  $T$ , 等于金属沸点  $T_m$ , 火焰温度  $T_f$  等于金属氧化物沸点  $T_k$ 。

(4) 忽略颗粒热辐射。

设气相与金属氧化物在共存区域内处于平衡状态, 当流场定常时

$$m = 4\pi r^2 \rho u = \text{常数} \quad (5-91)$$

无脚标表示两相混合物,  $r$  表示空间任意的坐标。

由于凝聚态产物无扩散效应, 气体中某组分  $i$  的组元守恒方程为

$$\frac{dm_i}{dt} = 4\pi r^2 \rho u \frac{dY_i}{dr} - 4\pi \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho_g D \frac{dY_{ig}}{dr} \right)$$

其中  $m_i$  为组分  $i$  的流量,  $Y_i$  为组分  $i$  在两相混合物中的质量分数,  $Y_{ig}$  为组分  $i$  在气相中的质量分数, 脚标  $g$  表示气相。

当  $\rho_i D = \text{常数}$  时

$$m_i = 4\pi r^2 \left( \rho u Y_i - \rho_g D \frac{dY_{ig}}{dr} \right) = \text{常数} \quad (5-92)$$

根据(3-40)式

$$\rho_g(1 - \varepsilon_c) = \rho(1 - Y_c)$$

其中  $\varepsilon_c$  为凝聚产物的体积分数,  $Y_c$  为凝聚产物在混合物中的质量分数。如果忽略  $\varepsilon_c$

$$\rho_g = \rho(1 - Y_c)$$

根据定义

$$(1 - Y_c)Y_{ig} = Y_i$$

故(5-92)式写成

$$m_{i,1,2} = 4\pi r^2 \rho \left( u Y_i - D \frac{dY_i}{dr} \right)$$

脚标 1, 2 分别表示区域 I 和区域 II。



引入无量纲量  $M = \frac{m}{4\pi\rho Dr_0}$  和  $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$

$$M_{i,1,2} = MY_i - \bar{r}^2 \frac{dY_i}{d\bar{r}} \quad (5-93)$$

当  $\bar{r} = \bar{r}_f$  时  $Y_i = Y_{i,f}$ , 其中脚标  $f$  表示火焰阵面。该方程有解

$$M \left( \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_f} \right) = \ln \left( \frac{MY_{i,f} - M_{i,1,2}}{MY_i - M_{i,1,2}} \right) \quad (5-94)$$

(I) 区或 (II) 区的能量守恒方程为

$$\sum m_i C_{p,i} T - 4\pi \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (5-95)$$

以火焰阵面为边界积分该式

$$\begin{aligned} \sum m_i C_{p,i} T - 4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \sum m_i C_{p,i} T_s + m_{v,1} \frac{Q_1}{1+b} \\ + m_{c,1} \frac{Q}{1+b} - 4\pi r_f^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_f \end{aligned} \quad (5-96)$$

其中脚标  $v$  和  $c$  分别表示气态和凝聚态金属氧化物, 脚标  $s$  表示液滴表面。  $Q_1$  和  $Q$  分别为单位质量的金属生成气态和凝聚态产物时释放的热。  $Q_2 = Q - Q_1$  为金属燃烧产物的凝聚热。右端最后一项  $-4\pi r_f^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_f$  表示火焰阵面向 (I) 区传递的热。

当  $r = r_0$  时

$$4\pi r_0^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_0 = m_{v,1} \frac{Q_1}{1+b} + m_{c,1} \frac{Q}{1+b} + 4\pi r_0^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_s \quad (5-97)$$

假设颗粒得到的热量全部用于液滴气化

$$4\pi r_0^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_0 = m_f L_v + m_{v,1} \frac{Q - Q_1}{1+b}$$

其中  $L_v$  为金属气化潜热。将该式代入 (5-97) 式得

$$4\pi r_f^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_f = m_{v,1} \frac{Q_1}{1+b} + m_{c,1} \frac{Q}{1+b} + m_f L_v$$

由于  $m_{v,1} = -(1+b)\theta\eta m_f$  和  $m_{c,1} = -(1+b)(1-\theta)\xi_1 m_f$ , 其中  $\xi_1$  为流入 (I) 区的凝聚态氧化产物的质量分数, 故

$$4\pi r_f^2 k \left( \frac{dT}{dr} \right)_f = m_f (L - (1+b)\theta\eta Q)$$

$$-(1+b)(1-\theta)\xi_1 Q) \quad (5-98)$$

设  $C_p = C_p$ ,  $L_e = 1$ , 引入无量纲量  $\bar{\theta} = (1+b)\theta$ ,  $\bar{Q} = \frac{Q}{L_e(1+b)}$ ,  $\bar{T} = \frac{C_p T}{L_e}$ , 由(5-97)式和(5-98)式得

$$\sum_i M_i \bar{h}_i - \bar{r}^2 \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} = H_{1,2} \quad (5-99)$$

其中

$$\bar{h}_{ox} = (\bar{T} - \bar{T}_s)$$

$$\bar{h}_j = (\bar{T} - \bar{T}_s)$$

$$\bar{h}_r = -\bar{Q}_1 + (\bar{T} - \bar{T}_s)$$

$$\bar{h}_c = -\bar{Q} + (\bar{T} - \bar{T}_s)$$

脚标  $ox$  表示氧化性气体,  $r$  表示金属蒸气。

$$H_1 = M_F \{ (\bar{\theta}\eta\bar{Q} - 1) + (1+b-\bar{\theta})\eta_1\bar{Q} \}$$

流入(II)区的凝聚态金属氧化物的质量分数为  $\xi_2$ , 令  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ , 于是有  $(1-\xi)$  的凝聚态金属氧化物留在火焰阵面内, 这使得能量遭受损失, 其值为

$$Q_{loss} = m_{e,1}(1-\xi) \frac{Q}{1+b} - m_{e,1}(1-\xi)C_p(T_f - T_s)$$

根据火焰阵面的能量守恒方程

$$H_2 = H_1 - M_F(1+b-\bar{\theta})(-\bar{Q} + (\bar{T}_f - \bar{T}_s))(1-\xi) \quad (5-100)$$

根据质量守恒方程

$$M_{v,1} = -(\bar{\theta}\eta)M_F$$

$$M_{c,1} = -(1+b-\bar{\theta})\xi_1 M_F$$

$$M_{ox} = -bM_F$$

$$M_{v,2} = \bar{\theta}(1-\eta)M_F$$

$$M_{c,2} = (1+b-\bar{\theta})\xi_2 M_F$$

$$M_1 = M_{v,1} + M_{c,1} + M_F = J_1 M_F$$

$$M_{g,1} = M_{v,1} + M_F = (1-\bar{\theta}\eta)M_F$$

$$M_2 = M_{v,2} + M_{c,2} + M_{ox} = J_2 M_F$$

$$M_{g,2} = M_{v,2} + M_{ox} = (-b + \bar{\theta}(1-\eta))M_F$$

其中  $J_1 = 1 + \bar{\theta}\eta + (1 + b - \bar{\theta})\xi_1$ ,  $J_2 = -b + \bar{\theta}(1 - \eta) + (1 + b - \theta)\xi_2$ 。

以火焰阵面为参照点, 利用上述诸式积分(5-99)式得

$$M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) = - \ln(1 - J(\bar{T}_f - \bar{T}) / (J(\bar{T}_f - \bar{T}_s) - \varphi)) \quad (5-101)$$

其中  $\varphi = (M_s \bar{Q}_1 + M_s \bar{Q} + H) / M_r$ 。方程(5-94)和(5-101)式为流场浓度和温度分布的通解。

根据瞬时反应假设,  $Y_{r,f} = 0$ ,  $Y_{s,f} = 0$ , 故

(I) 区

$$\begin{aligned} Y_{s,1} &= -(1 + b - \bar{\theta})\xi_1 / J_1 \\ M_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln \frac{J_1 Y_{s,1} - \bar{\theta}\eta}{J_1 Y_{s,f} - \bar{\theta}\eta} \\ M_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln(1 - J_1 Y_r) \\ M_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln \left( 1 - \frac{J_1 (\bar{T}_f - \bar{T})}{J_1 (\bar{T}_f - \bar{T}_s) - \varphi_1} \right) \end{aligned}$$

(II) 区

$$\begin{aligned} Y_{s,2} &= (1 + b - \bar{\theta})\xi_2 / J_2 \\ M_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln \frac{J_2 Y_{s,2} - \bar{\theta}(1 - \eta)}{J_2 Y_{s,f} - \bar{\theta}(1 - \eta)} \\ M_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln(1 + J_2 - Y_{s\alpha}) \\ M_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) &= - \ln \left( 1 - \frac{J_2 (\bar{T}_f - \bar{T})}{J_2 (\bar{T}_f - \bar{T}_s) - \varphi_2} \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \bar{\theta}\eta(\bar{Q} - \bar{Q}_1) - 1 \\ \varphi_2 &= (\bar{\theta}\eta\bar{Q} - 1) + \bar{\theta}(1 - \eta)\bar{Q}_1 \\ &\quad + (1 + b - \bar{\theta})(\bar{Q} - (\bar{T}_f - \bar{T}_s)(1 - \xi)) \\ \bar{Y}_{s\alpha} &= \frac{Y_{s\alpha}}{b} \end{aligned}$$

根据假设 2,  $\bar{r}=1$  时  $Y_{v,1}=0$  和  $\bar{r}=\infty$  时,  $Y_{v,2}=0$ , 故

$$M_F J_1 \left( 1 - \frac{1}{\bar{r}_f} \right) = \ln(1 + J_1 Y_{v,f} / (\bar{\theta} \eta)) \quad (5-102)$$

$$M_F J_1 \left( 1 - \frac{1}{\bar{r}_f} \right) = -\ln(1 - J_1 Y_{F,o}) \quad (5-103)$$

$$M_F J_1 \left( 1 - \frac{1}{\bar{r}_f} \right) = \ln(1 + J_1 (\bar{T}_f - \bar{T}_0) / (1 - \theta \eta (\bar{Q} - \bar{Q}_1))) \quad (5-104)$$

$$M_F J_2 / \bar{r}_f = -\ln(1 - J_2 Y_{v,f} / (\bar{\theta} (1 - \eta))) \quad (5-105)$$

$$M_F J_2 / \bar{r}_f = \ln(1 + J_2 \bar{Y}_{\alpha, \infty}) \quad (5-106)$$

$$M_F J_2 / \bar{r}_f = \ln(1 - J_2 B / (J_2 \alpha - \varphi_2)) \quad (5-107)$$

其中  $B = \bar{T}_f - \bar{T}_\infty$ ,  $\alpha = \bar{T}_f - \bar{T}_s$ 。

对于经典液滴燃烧模型,  $Y_{v,s}$  和  $T_f$  是通过守恒方程确定的, 但这里,  $Y_{v,s}=0$ ,  $T_f=T_{bm}$  是给定的, 取而代之的是  $\bar{\theta}$  和  $\eta$ 。因此, 上述 6 个方程可确定  $M_F$ ,  $\bar{r}_f$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\eta$ ,  $Y_{v,f}$  和  $Y_{F,f}$ 。

由上述诸式

$$\bar{Y}_{\alpha, \infty} = \{(1 - \eta)(1 - \bar{\theta} \eta Q_2) / (\alpha \eta) - J_2\}^{-1} \quad (5-108)$$

$$B = \bar{Y}_{\alpha, \infty} (\varphi_2 - J_2 \alpha) \quad (5-109)$$

或者写成  $C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3 = 0 \quad (5-110)$

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{Y}_{\alpha, \infty} \{(1 + b)(Q - \alpha(1 - \xi_1)) + ab - 1\} - B}{\bar{Y}_{\alpha, \infty} \{Q_2(1 - \eta) - \alpha(\eta - \xi_1)\}} \quad (5-111)$$

而有

$$Y_{v,f} = \alpha \theta \eta / (1 - \theta \eta Q_2) \quad (5-112)$$

$$Y_{F,s} = \{J_1 + (1 - \bar{\theta} \eta Q_2) / \alpha\}^{-1} \quad (5-113)$$

$$M_F = \{\ln(1 + J_1 \alpha / (1 - \theta \eta Q_2))\} / \{J_1 + \ln(1 + J_2 \bar{Y}_{\alpha, \infty}) / J_2\} \quad (5-114)$$

$$\bar{r}_f = 1 + \frac{J_2 \ln(1 + J_1 \alpha / (1 - \theta \eta Q_2))}{J_1 \ln(1 + J_2 \bar{Y}_{\alpha, \infty})} \quad (5-115)$$

其中  $C_1, C_2$  和  $C_3$  皆为  $b, Q_1, Q_2, \alpha, B, \bar{Y}_{\infty, \infty}$  的函数。方程(5-110)有两个根,但只有一个有物理意义。

如果金属液滴表面不存在金属氧化物的凝聚,于是  $Y_{v, f} \neq 0$ , 其值需由方程来确定。假设  $\eta = 0, \xi_1 = 0$

$$Y_{v, f} = \bar{Y}_{\infty, \infty} \theta / (1 + J_2 \bar{Y}_{\infty, \infty}) \quad (5-116)$$

用该式取代(5-112)式或(5-103)式,而方程(5-111)、方程(5-113)~方程(5-115)中  $\eta = 0, J_1 = 1$ 。

金属在低氧气体中燃烧时,火焰温度较低,燃烧产物全部是凝聚态,  $\theta = 0$ 。在高氧气体中燃烧时,火焰温度较高,燃烧产物全部是气态,  $\theta = 1$ 。

图 5-14 为燃烧速率随氧气浓度和环境温度的变化曲线,  $M_f$  几乎随  $Y_{O_2, \infty}$  的增加而线性增加,但对温度的变化却不敏感,Al 的变化速率明显高于 Be。

图 5-15 为火焰半径随氧气浓度和环境温度的变化曲线,当火焰阵面包含凝聚态氧化物时(低  $Y_{O_2, \infty}$ )如果  $T_\infty < T_s, \bar{r}_f$  随  $Y_{O_2, \infty}$  的增加而迅速增加。如果  $T_\infty > T_s$ ,则  $\bar{r}_f$  随  $Y_{O_2, \infty}$  的增加迅速降低。当  $Y_{O_2, \infty}$  足够大时,温度  $T_\infty$  和氧气浓度  $Y_{O_2, \infty}$  的变化对  $\bar{r}_f$  的影响很小。

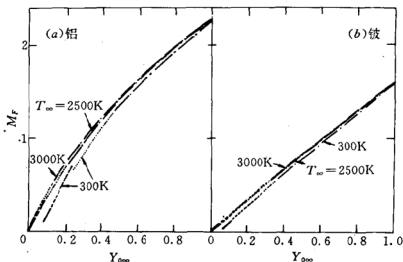


图 5-14 燃烧  $M_f$  随  $Y_{O_2, \infty}$  和  $T_\infty$  的变化曲线

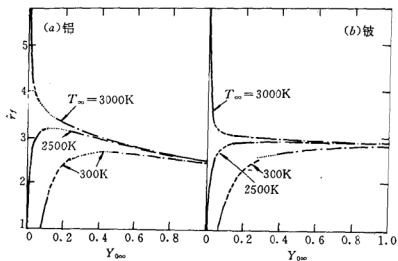


图 5-15 火焰半径  $\bar{r}_f$  随  $Y_{O_{\infty}}$  和  $T_{\infty}$  的变化曲线

## 第六章 两相爆炸

广义地讲,凡某个量急剧增长以致最后失控的现象都叫爆炸,如人口爆炸、信息爆炸等等。但通常所说的爆炸是一种物理过程,指能量迅速释放导致的对外破坏作用。它包括物理爆炸、化学爆炸和核爆炸。

物理变化引起的爆炸叫物理爆炸,如钢瓶爆炸、锅炉爆炸等就是高压气体从容器薄弱处突出引起的。相变也能导致爆炸,如沸点悬殊的液体混合时,低沸点液体在界面的迅速蒸发、液化气体燃料在贮罐破裂时,泄漏引起的急速蒸发等都可能导致爆炸。后者称作液化气体爆炸(BLEVE),常伴有点火燃烧。

化学反应引起的爆炸叫化学爆炸。最简单的反应体系为均态体系,即全系统状态一致,反应热的积累使体系的温度升高从而导致反应失控,称这类爆炸为热爆炸。密闭容器中低速传播的火焰也能导致反应失控,体系的最大压力和最大压力上升速率是评估此类体系爆炸危险性的重要参数。快速火焰或加速火焰可以诱导激波,由于火焰与激波的正反馈,适当条件下激波会不断增强,从而具有极大的破坏性,这类激波也称为爆炸波。

本章内容包括:均态热爆炸,包括均态的孤立物系、封闭物系、敞开物系和多相体系;密闭容器中低速火焰导致的均相或两相爆炸;火焰诱导激波,讨论湍流火焰的加速机制和火焰诱导激波现象的理论解。

### 6.1 均态热爆炸

流场参数仅随时间变化而无空间分布的体系称为均态体系,

又称零维体系。该体系没有点火源,反应时没有火焰。适当条件下,放热反应的速率经一段诱导时间后会急剧上升,从而导致点火和爆炸。例如 CO 和 O<sub>2</sub> 混合物在 100℃ 以下的温度保存时,1~2 年内仅有 2%~3% 的组分因反应而消耗,当体系温度逐渐上升至 500~600℃ 时,反应速率急增而导致爆炸。

### 6.1.1 孤立物系

对于均态物系,能量方程(1-16)可简化为

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \dot{\omega}_s Q_s$$

由于体系体积不变,故  $\rho = \text{常数}$ , 上式写成

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = - \frac{dC_s}{dt} Q_s \quad (6-1)$$

其中  $C_s$  表示反应物的浓度。其初始条件为

$$t=0 \text{ 时} \quad C_s = C_{s0}, T = T_0$$

$$\text{有解} \quad T - T_0 = \frac{Q_s}{C_v} (Y_{s0} - Y_s) \quad (6-2)$$

记  $C_s=0$  时温度为  $T_b$

$$T_b = T_0 + \frac{Q_s}{C_v} Y_{s0}$$

$$\text{于是} \quad C_s = C_{s0} \frac{T_b - T}{T_b - T_0} \quad (6-3)$$

根据 Arrhenius 定律

$$\frac{dC_s}{dt} = - AC_s^n e^{-E_s/RT} = - W(C_s, T) \quad (6-4)$$

$$\text{于是} \quad \frac{dT}{dt} = AC_{s0}^{n-1} (T_b - T_0)^{1-n} (T_b - T) \cdot e^{-E_s/RT} = W_1(T) \quad (6-5)$$

$$\frac{dC_s}{dt} = - AC_{s0}^n \exp \left[ - \frac{E_s/RT_0}{1 + \frac{Q_s C_{s0}}{C_v \rho T_0} \left( 1 - \frac{C_s}{C_{s0}} \right)} \right] = - W_2(C_s) \quad (6-6)$$

由方程(6-4)~方程(6-6)可求得温度、浓度和反应速率随时



间的变化曲线,如图 6-1 所示。

反应分为两个阶段:开始温度和浓度变化缓慢,称为诱导期;后来温度迅速增加,浓度迅速下降,称为燃烧期。该现象主要与反应速率方程中  $e^{-E_a/RT}$  项有关,活化能  $E_a$  愈大,诱导期愈长。例如,

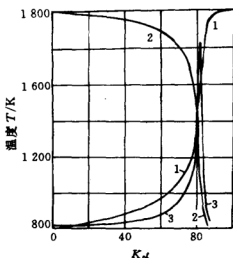


图 6-1 温度、浓度和反应速率的变化曲线

$\frac{E_a}{RT_0} = 25$  时,诱导期占全反应过程的 99.97%。此时,反应速率曲线呈脉冲形状,可用  $\delta$  函数来描述

$$W(t) = A_0 \delta(t - t_g)$$

其中  $A_0 = \int_0^\infty W(t) dt$ ,  $t_g$  为诱导时间,可定义为  $C_s = 0.01 C_s$ 。所需的时间。

为进一步讨论  $e^{-E_a/RT}$  对点火诱导的影响, Frank-Kamenetskii<sup>[1]</sup> 将函数  $W(T) = Ae^{-E_a/RT}$  在某温度  $T_1$  附近泰勒级数展开

$$W(T) = Ae^{-E_a/RT} \approx A'e^{(T-T_1)/\theta}$$

其中  $A' = Ae^{-E_a/RT_1}$ ,  $\theta = \frac{RT_1^2}{E_a}$ 。

代入(6-5)式得

$$\frac{dT}{dt} = W(0) \exp\left(\frac{T - T_0}{\theta}\right) \quad (6-7)$$

其中  $W(0) = \left( \frac{dT}{dt} \right)_{t=0} = AC_{s0}^{n-1} (T_s - T_0) e^{-E_a/RT_0}$ 。初始条件为

$$t=0 \text{ 时} \quad T=T_0$$

$$\text{故} \quad t = \frac{\Theta}{W(0)} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{T - T_0}{\Theta} \right) \right] \quad (6-8)$$

代入(6-3)式得

$$\frac{C_s}{C_{s0}} = 1 - \frac{\Theta}{T_s - T_0} \ln \frac{\Theta}{\Theta - W(0)t} \quad (6-9)$$

仅当  $t < \frac{\Theta}{W(0)}$  时, 即反应速率未发生显著变化时, (6-8) 式和 (6-9)

式才有效。图 6-2 中曲线 1 为精确解, 曲线 2 为 Frank-Kamentskii 近似解, 曲线 3 为等温反应, 即  $W=W(0)$ 。图(a)对应于低活化能

$\frac{E_a}{RT_0} = 10, T_s = 2T_0, n=2$ ; 图(b)对应于高活化能  $\frac{E_a}{RT_0} = 20, T_s = 5T_0, n=1$ 。

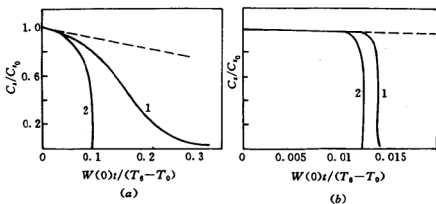


图 6-2 浓度随时间变化曲线

## 6.1.2 封闭物系

若容器的壁面温度保持常数  $T_0$ , 即体系初始温度, 系统传给壁面的热量为  $Sh'(T - T_0)$ , 其中  $S$  为容器表面积,  $h'$  为热传递系数。(6-1)式可写成

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_v} (q_+ - q_-) \quad (6-10)$$

其中  $q_+(T) = \dot{\omega}_s Q$ , 表示反应释放的热, 为指数曲线,  $q_-(T) = \frac{S}{V} h' \times (T - T_0)$  表示器壁损失的热, 为直线。  $V$  表示容器体积。

如图 6-3 所示, 若  $q_-$  与  $q_+$  相交 (图中曲线 2), 交点  $F$  是稳定点。反应后,  $q_+ > q_-$ , 体系温度上升趋于  $T_F$ ; 若温度略高于  $T_F$ , 因  $q_+ < q_-$ , 体系温度下降仍趋于  $T_F$ 。  $G$  点是不稳定点, 温度略低时, 系统将趋于  $F$  点; 略高时, 温度持续上升直至爆炸。若  $q_-$  与  $q_+$  不相交 (图中曲线 3),  $q_+$  始终大于  $q_-$ , 故温度持续上升而导致爆炸。

改变初始温度  $T_0$  时,  $q_+$  与  $q_-$  的相对位置也随之变化, 如图 6-4 所示。

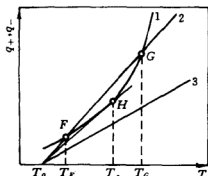


图 6-3 失热和放热曲线

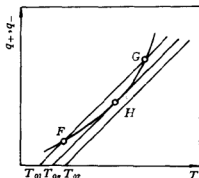


图 6-4 不同初始温度的失热和放热曲线

Semenov<sup>[2]</sup>理论将容器中的反应分为两种: 稳态反应和非稳态爆炸, 其间存在某种临界条件。图中  $T_0 = T_{0s}$  便是临界点, 此时  $q_-$  与  $q_+$  相切。  $T_0 < T_{0s}$  为稳态反应,  $T_0 > T_{0s}$  为非稳态爆炸。

将 (6-10) 式在  $T = T_0$  点进行 Frank-Kamenetskii 转换

$$\frac{d\theta}{d\tau} = e^\theta - r\theta \quad (6-11)$$

$$\text{其中 } \theta = \frac{T - T_0}{\theta}, \tau = \frac{t}{t_a}, t_a = \frac{\theta C_v \rho}{Q_s C_{s0}} \frac{1}{A} e^{T_0 / r T_0}, r = \frac{t_w}{t_a}, t_w = \frac{C_v \rho V}{h' S}$$

$q_-$  与  $q_+$  相切时, 切点上

$$e^\theta = r\theta$$

$$\frac{d}{d\theta} e^{\theta} = \frac{d}{d\theta} (r(\theta))$$

即  $r=e$  和  $\theta=1$

或者写成

$$h' \frac{s}{V} \frac{\Theta \exp(E_s/RT_0)}{AC_{s0}^n Q_s} = e \quad (6-12)$$

该式为热爆炸临界关系式,容器和反应介质的特性确定后,可求得初始临界温度  $T_{0*}$ 。

当指数函数  $Ae^{-E_s/RT}$  与  $\Gamma$  函数  $T^m$  在  $T_1$  点相切时,该点附近满足方程<sup>[3]</sup>

$$T^m \simeq e^m T_1^m e^{-mT_1/T}$$

故  $T_0^2 \exp(-E_s/RT_0) = T_1^2 e^2 \exp\{- (E_s$

$$+ 2RT_1)/RT_0\} = A \exp\left(-\frac{RE_s}{T_0}\right)$$

于是(6-12)式可写成

$$p_*^2 \exp(-E_1/RT_0) = \text{常数}$$

或  $\ln p_* - \frac{E_1}{nR} T_0 = \text{常数} \quad (6-13)$

其中  $E_1$  是由  $E_s$  等组合起来的常数。该式说明临界压力(或称为最小爆炸压力)的对数与初始温度的倒数呈线型关系,如图 6-5 所示。

### 6.1.3 敞开物系<sup>[3]</sup>

图 6-6 所示为反应物、产物和惰性介质组成的敞开物系。这里,反应物指按反应计量系数组成的反应混合物,惰性介质指不起反应的物质,包括剩余的氧化剂或燃料。反应方程为



其中  $s$  和  $P$  分别表示反应物和产物。

反应物由圆柱形容器的壁面流入,状态为  $Y_{s0}$  和  $T_0$ ,产物由轴线处流出,其状态即体系状态,记作  $Y_s$  和  $T$ 。对于绝热壁面

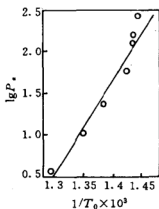


图 6-5 临界压力与初始温度的关系曲线

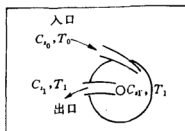


图 6-6 敞开物系

$$G(Y_s - Y_{s0}) = V\dot{\omega}_s \quad (6-14)$$

$$G(C, T_0 + Q, Y_{s0}) = G(C, T + Q, Y_s)$$

其中  $G$  为流量,  $V$  为容器体积。从而有

$$\frac{G}{V} C_s (T - T_0) = Q_s W_1(T) \quad (6-15)$$

其中

$$W_1(T) = AY_{s0}^n \left( \frac{T_b - T}{T_b - T_0} \right)^n e^{-\frac{E}{RT}}$$

$$T_b = T_0 + \frac{Q_s Y_{s0}}{C_s}$$

方程右端为反应释放的热, 右端为流动带走的热, 两者相等时为方程的解, 如图 6-7 所示。

封闭体系的热损失是燃烧系统与环境间的热传导造成的, 而敞开体系则归因于流动。对于高速流动(图中直线 1), 反应稳定在  $F$  点, 系统温度接近于初始温度, 反应极慢。对于低速流动(图中直线 3), 质点在系统内逗留时间大于点火诱导时间, 体系稳定在  $K$  点, 温度接近火焰温度  $T_b$ , 但反应速率却不高。当流速变化范围对应于直线 2 时, 出现三个交点, 其中  $F'$  和  $M$  为稳定点,  $G$  为不稳定点, 微小的变化可使状态失稳。随流速的减小,  $F'$  与  $G$  逐渐逼近, 最后成为一点  $H$ 。

由方程(6-15)绘制的  $G-T$  曲线如图 6-8 所示, 其解分为上下

两支,虚线为不稳定解。低温时, $G$ 的减小使解沿下支移动,至1点时若继续减小 $G$ ,温度将从下支突跃至上支,称为点火。反之,高温时, $G$ 的增大,使解沿上支移动,至2点时若继续增大 $G$ ,温度将从上支移至下支,称为熄火。

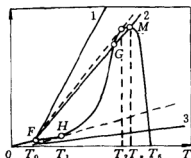


图 6-7 敞开系统的  
失热和放热曲线

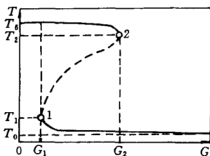


图 6-8 敞开绝热系  
统的  $G-T$  曲线

反应级数为 1 时, (6-15) 式可写成

$$\frac{G}{V} = k \frac{T_b - T}{T_b - T_0} e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad (6-16)$$

其中  $k$  是组合常数。临界点  $\frac{dG}{dT} = 0$  是一个关于  $T$  的二次方程, 其解为

$$T_1 = T_0 + \frac{RT_0^2}{E_a}$$

$$T_2 = T_b - \frac{RT_b^2}{E_a}$$

代入 (6-16) 式得

$$G_1 = eVA \frac{E_a(T_b - T_0)}{RT_0^2} e^{-\frac{E_a}{RT_0}} \quad (6-17)$$

$$G_2 = \frac{VA}{e} \cdot \frac{RT_b^2}{E_a(T_b - T_0)} e^{-\frac{E_a}{RT_b}}$$

对于非绝热情况, 能量方程为

$$G(C_p T_0 + Q_s Y_{s0}) = G(C_p T + Q_s Y_s) + Hs(T - T_0) \quad (6-18)$$

或

$$T = T_0 + \frac{Q_s(Y_{s0} - Y_s)}{C_{pff}} \quad (6-19)$$

其中  $C_{\text{eff}} = C_p + h's/G$  称为有效比热。由(6-18)式和(6-14)式得

$$\frac{G}{V} C_{\text{eff}} (T - T_0) = Q_s W_1(T) \quad (6-20)$$

其中

$$W_1(T) = AY_{s0} \left( \frac{T'_b - T}{T'_b - T_0} \right)^n e^{-\frac{E_s}{RT}}$$

$$T'_b = T_0 + Q_s Y_{s0} / C_{\text{eff}}$$

该式与绝热情形的(6-15)式形式一致。当反应级数为1时同样有

$$\frac{G}{V} = k(G) \frac{T'_b - T}{T'_b - T_0} e^{-\frac{E_s}{RT}} \quad (6-21)$$

临界点为

$$T_1 = T_0 + \frac{RT_0^2}{E_s} \quad (6-22)$$

$$T_2 = T'_b - \frac{RT'_b^2}{E_s} \quad (6-23)$$

将(6-23)式代入(6-21)式可得到两个解  $G'_2$  和  $G'_3$ , 这说明解的上半支存在两个临界熄火点。根据(6-18)式,  $G$  很小时, 壁面热损失占优势, 这可导致系统熄火, 临界熄火点为图中  $T'_2(G'_2)$ 。方程(6-18)亦可写成

$$Q_s(Y_{s0} - Y_s) = C_{\text{eff}}(T - T_0)$$

$G$  很大时, 反应物在容器中逗留时间较短, 流动导致的热损失占优势, 临界点为图中  $T'_3(G'_3)$ 。  $T_1$  位于解的下半支, 若将(6-22)式代入(6-19)式可得

$$C_p G + h's = eV AY_{s0} \frac{E_s Q_s}{RT_0^2} e^{-E_s/RT_0}$$

当  $T_0$  不太大,  $h's$  比较大时上式无解, 即  $T_1$  不存在。此时下支解为图中曲线  $a$ , 是连续光滑的。

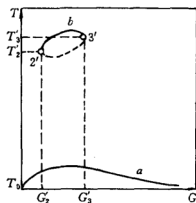


图 6-9 敞开非绝热体系的  $G-T$  曲线

### 6.1.4 两相体系<sup>[4]</sup>

对于颗粒悬浮流,忽略颗粒间的影响,忽略 Stefan 流,研究单个颗粒时,有气相定常方程

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dC_i}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

边界条件为  $r \rightarrow \infty$  时

$$C_i = C_{i\infty} \quad T = T_{\infty} \quad (6-24)$$

$$r=r_0 \text{ 时} \quad C_i = C_{is} \quad -D \frac{dC_i}{dr} = A e^{-E_s/RT_s} C_{is}^m \quad (6-25)$$

$$T = T_s \quad k \frac{dT}{dr} = A e^{-E_s/RT_s} C_{is}^m Q_i \quad (6-26)$$

其中脚标  $i$  表示气体中  $i$  组分,  $r_0$  为颗粒半径。

引进无量纲量

$$\psi = \frac{C_i - C_{i\infty}}{C_{i\infty}}, \theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty}}, \eta = \frac{r}{r_0}$$

于是

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\psi}{d\eta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} \right) = 0$$

由边界条件(6-24)式得

$$\psi = -\frac{A_1}{\eta} \quad \text{和} \quad \theta = -\frac{A_2}{\eta}$$

其中  $A_1$  和  $A_2$  为积分常数。显然

$$\psi(1) = -A_1$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=1} = A_1$$

(6-27)

$$\theta(1) = \theta_s = -A_2$$

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=1} = A_2$$



将上述诸式代入(6-25)式和(6-26)式得

$$A_1 = -\alpha_m(1 + \psi(1))^n \exp\left(\varepsilon \cdot \frac{A_2}{A_2 - 1}\right) \quad (6-28)$$

$$A_2 = \beta_m(1 + \psi(1))^n \exp\left(\varepsilon \frac{A_2}{A_2 - 1}\right) \quad (6-29)$$

其中

$$\alpha_m = \frac{Ar_0 C_{i\infty}^{m-1} e^{-\varepsilon}}{D}$$

$$\beta_m = \frac{Ar_0 Q_i C_{i\infty}^m e^{-\varepsilon}}{kT_{\infty}}$$

$$\varepsilon = \frac{E_a}{RT_{\infty}}$$

比较(6-27)式和(6-28)式得

$$A_1 = -\frac{\alpha_m}{\beta_m} A_2 \quad (6-30)$$

颗粒消耗率为

$$R_p = 4\pi r_0^2 D \left. \frac{dC_i}{dr} \right|_{r=0}$$

故

$$\frac{R_p}{4\pi r_0 D C_{i\infty}} = \frac{\alpha_m}{\beta_m} \theta_s \quad (6-31)$$

在  $\frac{R_p}{4\pi r_0 D C_{i\infty}} \sim \theta_s$  平面, 该方程为过零点的直线, 如图 6-10 所示。由

于  $\theta_s = -\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=1}$ , 其值与两相热传导有关。 $\theta > 0$  时,  $T_s > T_{\infty}$ , 颗粒向气体传递能量。直线斜率为  $\frac{\alpha_m}{\beta_m}$ , 对于一级反应,  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a}{D}$ , 其中  $a = \frac{kT_{\infty}}{Q_i C_{i\infty}}$ , 表示能量扩散系数与质量扩散系数之比。

对于一级反应, 由(6-25)式和(6-27)式得

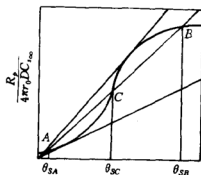


图 6-10 多相体系  
失热和放热曲线

$$A_1 = \frac{r_0 A \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1 + \theta_s}\right)}{D + r_0 A \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1 + \theta_s}\right)} = \frac{R_p}{4\pi r_0 D C_{\infty}} \quad (6-32)$$

该方程在  $\frac{R_p}{4\pi r_0 D C_{\infty}} \sim \theta_s$  平面中形状较为复杂, 见图中曲线 1。

当  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} > S_1$  时,  $S_1$  为某临界斜率(参见图 6-10), 直线与曲线仅交于  $D$ , 该点  $\theta_{SD} \approx 0$ 。当  $\theta_s$  大于  $\theta_{SD}$  时, 颗粒传给气相的热大于反应释放的热, 于是颗粒温度下降, 至  $\theta_s = \theta_{SD}$  后状态稳定。反之, 颗粒传给气相的热小于反应释放的热, 温度上升, 至  $\theta_s = \theta_{SD}$  稳定, 故  $D$  点是稳态点。

当  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < S_2$  时, 颗粒因反应释放的热始终大于传导失去的热, 反应系统温度持续上升, 而导致爆炸。

当  $S_2 < \frac{\alpha_1}{\beta_1} < S_1$  时, 直线与曲线有三个交点, 其中  $A$  点和  $B$  点是稳定的,  $C$  点不稳定, 稍有扰动便失稳或是趋于  $B$  或是趋于  $A$ 。

## 6.2 密闭容器中低速燃烧导致的爆炸

### 6.2.1 气相爆炸

#### 一、守恒方程<sup>[5]</sup>

无量纲化时, 取敞开系统完全燃烧后的状态为参照态, 容器半径  $r_0$  为特征长度, 参照 1.1.2 节有守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) &= \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{1}{\varepsilon} W \\ \gamma M^2 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \gamma M^2 \varepsilon P_r \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \\ \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (6-33)$$

$$+ \varepsilon(\gamma - 1)M^2 P_r \Phi + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \sigma)W$$

$$p = \rho T$$

此为无量纲形式的方程, 其中  $C = \frac{Y_s}{Y_{s0}}$ ,  $\sigma = \frac{\rho_b}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_b} = \left(1 + \frac{Q_F Y_{F0}}{C T_0}\right)^{-1}$

$W = z\rho c \exp\left(-\frac{N}{T}\right)$ ,  $z = \frac{aA}{u_b^2}$ ,  $N = -\frac{E_a}{RT_b}$ , 脚标 0 为初始态, 脚标 b 为敞开燃烧的产物状态。

密闭容器中,  $M \ll 1$ , 故忽略方程中  $\Phi$  和  $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ 。又  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 故  $\frac{1}{\varepsilon}W = \delta(x - x_F)W_0$ ,  $x_F$  表示火焰位置, 于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = -\delta(x - x_F)W_0 \quad (6-34)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (6-35)$$

$$\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{dt} = (1 - \sigma)\delta(x - x_F)W_0 \quad (6-36)$$

由(6-33)式、(6-34)式和(6-36)式得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho [(1 - \sigma)c + T] \} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho u_j [(1 - \sigma)c + T] \} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

器壁处  $u_i = 0$ , 在容器内积分

$$\mathcal{A} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} p = \text{常数} \quad (6-37)$$

其中

$$\mathcal{A} = \iiint_V \rho [(1 - \sigma)c + T] dV$$

由于  $t=0$  时,  $p=1$ ,  $c=1$ ,  $T=\sigma$ ,  $\rho=\frac{1}{\sigma}$ , 故  $\mathcal{A}=\frac{1}{\sigma}$ 。完全燃烧后,  $p=p_*$ ,  $c=0$ , 故  $\mathcal{A}=p_*$ 。代入(6-37)式

$$p_* = 1 + \gamma \left( \frac{1 - \sigma}{\sigma} \right) \quad (6-38)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  时, 火焰阵面作为间断视作流场的内边界。边界外的流场有守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (6-39)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{dt} = 0 \quad (6-40)$$

令  $\psi = T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = p^{\frac{1}{\gamma}} / \rho$ , 方程(6-40)可写成

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \quad (6-41)$$

即流团在流动过程中熵不变。由状态方程和(6-40)式

$$p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt} = 0 \quad (6-42)$$

火焰两侧的守恒方程为

质量守恒方程  $\rho_+ (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} - S_F) = \rho_- (\mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} - S_F) = -S \quad (6-43)$

动量守恒方程  $p_+ \mathbf{n} + \rho_+ (\mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{n} - S_F) \mathbf{u}_+$   
 $= p_- \mathbf{n} + \rho_- (\mathbf{u}_- \cdot \mathbf{n} - S_F) \mathbf{u}_- \quad (6-44)$

组元守恒方程  $S(C_+ - C_-) - W_0 = 0$

能量守恒方程  $S(T_+ - T_-) + (1 - \sigma)W_0 = 0$

其中  $\mathbf{n}$  为火焰阵面的单位法矢量, 脚标 +、- 分别表示未燃和已燃一侧。因为  $C_+ = 1, C_- = 0$ , 故

$$S = W_0 \quad (6-45)$$

进而有  $T_+ - T_- = \sigma - 1 \quad (6-46)$

由于  $t=0$  时,  $T=\sigma, p=1$ , 故

$$\psi_+ = \sigma \quad (6-47)$$

$$\psi_- = \sigma + (1 - \sigma)p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (6-48)$$

根据  $\psi$  定义式

$$T_- = (1 - \sigma) + \sigma p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (6-49)$$

$$\rho_- = p^{\frac{1}{\gamma}} / (\sigma + (1 - \sigma)p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}) \quad (6-50)$$

## 二、流场的解析解

对于球形密闭容器的中心点火问题, 设火焰轨迹为  $r = \mathcal{R}(t)$ , 有  $S_r = \frac{d\mathcal{R}}{dt}$ 。(6-43)式可写成

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} \left( \frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_+ \right) = \frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_-$$

由于  $\frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{\psi_-}{\psi_+}$ , 故

$$\frac{\psi_-}{\sigma} \left( \frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_+ \right) = \frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_- \quad (6-51)$$

球坐标中, (6-42)式可写成

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} = 0$$

即

$$r^2 u + \frac{r^3}{3} \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} = F(t)$$

对于已燃区域 ( $r < \mathcal{R}(t)$ ),  $r \rightarrow 0$  时,  $r^2 u \rightarrow 0$ , 故

$$u(r, t) = -\frac{r}{3} \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6-52)$$

对于未燃区域 ( $r > \mathcal{R}(t)$ ),  $r \rightarrow 1$  时,  $u = 0$ , 故

$$u(r, t) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r^2} - r \right) \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}}$$

从而有

$$u_- = -\frac{\mathcal{R}}{3} \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6-53)$$

$$u_+ = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\mathcal{R}^2} - \mathcal{R} \right) \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6-54)$$

由(6-48)式、(6-51)式和上述两式得

$$\frac{1 - \sigma}{\sigma} p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left( \frac{d\mathcal{R}}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\mathcal{R}^2} - \mathcal{R} \right) \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{1}{3r\mathcal{R}^2} \frac{d \ln p}{dt}$$

由于

$$\frac{d}{dt} [p^{\frac{1}{\gamma}} (1 - \mathcal{R}^3)] = 3\mathcal{R}^2 p^{\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\mathcal{R}^2} - \mathcal{R} \right) \frac{d}{dt} \ln p^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{d\mathcal{R}}{dt} \right)$$

故 
$$-\frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{d}{dt} [p^{\frac{1}{\gamma}} (1 - \mathcal{R}^3)] = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt}$$

其初始条件为  $\mathcal{R}=0$  时,  $p=1$ , 故有解

$$(1 - \mathcal{R}^3)p^{\frac{1}{\gamma}} = 1 + \frac{\sigma(1-p)}{\gamma(1-\sigma)} \quad (6-55)$$

$$\text{或} \quad 1 - (1 - \mathcal{R}^3)p^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{p-1}{p_e-1} \quad (6-56)$$

由(6-54)式和(6-55)式得

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_+ = (3\mathcal{R}^2 p^{\frac{1}{\gamma}})^{-1} \frac{\sigma}{\gamma(1-\sigma)} \frac{dp}{dt}$$

由(6-43)式  $\frac{d\mathcal{R}}{dt} - u_+ = S\sigma p^{-\frac{1}{\gamma}}$ , 故

$$\frac{dp}{dt} = 3\sigma\mathcal{R}^2(p_e - 1)S$$

将(6-56)式代入上式得

$$\frac{dp}{dt} = 3 \left( 1 - \frac{p_e - p}{p^{\frac{1}{\gamma}}(p_e - 1)} \right)^{\frac{2}{3}} (p_e - 1)S \quad (6-57)$$

其中质量流率  $S$  是一个与火焰传播速度有关的物理量。理论分析表明<sup>[6]</sup>, 当  $\varepsilon \ll \frac{1}{N}$  时, 曲面火焰传播速度可用平面火焰的传播速度

来代替。若将坐标建立在火焰上, 其无量纲坐标为  $X = \frac{X^*}{\varepsilon}$ 。\* 表示有量纲量, 方程(6-33)可写成

$$\frac{1}{\varepsilon} \rho \left[ \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right)_x + (S_f - u) \left( \frac{\partial C}{\partial X} \right)_i \right] = \frac{1}{\varepsilon L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - \frac{1}{\varepsilon} W$$

稳定传播的火焰, 火焰坐标中流场定常, 故

$$S \frac{\partial C}{\partial X} = \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - W$$

同样

$$S \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + (1 - \sigma)W$$

边界条件为

$$X \rightarrow \infty \text{ 时} \quad C=1 \quad T=T_+ = \sigma p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$X \rightarrow -\infty \text{ 时} \quad C=0 \quad T=T_- = 1 - \sigma + \sigma p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Bush<sup>[7]</sup>用逼近法解得

$$S^2 = T_-^3 p \exp\left(-\frac{N}{T_-}\right) \quad (6-58)$$

将(6-49)式代入上式,有  $S=S(p)$ 。代入(6-57)式可得到关于  $p$  的常数微分方程。

球坐标中(6-41)式写成

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

即沿流团轨迹  $\frac{dr}{dt}=u, \psi=\text{常数}$ 。对于未燃区,因各流团初始状态相同,故  $\psi=\sigma$ 。对于已燃区域,根据(6-52)式,可用  $K=\mathcal{R}^3 p_f^{\frac{1}{\gamma}}$  给流团编号,由(6-53)式

$$K = p_f^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{p_f - p_e}{p_e - 1} = r^3 p_f^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6-59)$$

其中  $p_f$  表示该流团位于火焰阵面时流场的压力。

由(6-49)式和(6-50)式得

$$T = \sigma \left( \frac{p_e - 1}{\gamma} \left( \frac{p}{p_f} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad (6-60)$$

$$\rho = p_f^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \sigma \left( 1 + \frac{p_e - 1}{\gamma} p_f^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \right] \quad (6-61)$$

综上所述,先由(6-57)式求得某时刻  $t$  的压力  $p$ ;再由(6-56)式求得火焰所在位置;根据(6-53)式和(6-54)式求得流场的速度分布。将  $0 \sim t$  之间分成若干间隔,设某格点为  $i$ ,由(6-57)式求出燃时压力  $p_{fi}$ ;根据  $p$  和  $p_{fi}$  由(6-59)式求得空间位置  $r_i$ ,再由(6-60)式和(6-61)式求得该点的温度  $T_i$  和密度  $\rho_i$ ,这样可得到流场的温度和密度分布。

### 三、立方根定律和马赫效应<sup>[3,8]</sup>

密闭容器的总内能  $E=E_{th}+E_{ch}$ ,其中  $E_{th}$  和  $E_{ch}$  分别表示热能和化学能,本节所涉及的物理量皆为有量纲量。对于完全气体,  $c_v$  为常数时

$$E_{th} = c_v \int_M T dM$$

其中  $M$  为容器内总质量。设  $\bar{R} = \frac{\rho}{W}$  不因燃烧而变化, 其中  $W$  为有效分子量, 有

$$V = \frac{\bar{R}}{p} \int_M T dM$$

故 
$$p = \frac{\bar{R}}{c_v V} E_{th} \quad (6-62)$$

其中  $V$  为容器体积。对于绝热体系,  $E = E_{th} + E_{ca0} = \text{常数}$ , 令  $\eta = \frac{M - M_u}{M}$ , 脚标  $u$  表示未反应气体, 有  $E_{ca} = E_{ca0}(1 - \eta)$ , 代入上式

$$p = \frac{\bar{R}}{V c_v} E_{th0} + \frac{\bar{R}}{c_v V} \eta E_{ca0}$$

由于  $\eta = 0$  时,  $p = p_0$ ,  $\eta = 1$  时,  $p = p_c = \frac{\bar{R}}{V c_v} E$ , 故

$$\frac{p - 1}{p_c - 1} = \eta \quad (6-63)$$

该式说明, 压力与  $\eta$  成正比, 燃烧过程中压力不断上升。当  $\frac{dp}{dt}$  取最大值时, 容器内的压力出现突跃, 故最大压力上升速率  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  是评估容器爆炸危险的重要参数。根据(6-57)式,  $p = p_c$  时

$$r_0 \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = 3(p_c - p_0)S$$

或简写成 
$$V^{\frac{1}{3}} \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = K_G \quad (6-64)$$

其中  $K_G$  为常数。系统的  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  与容器体积的立方根成反比, 体积愈大,  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  愈小。称此规律为立方根定律。

火焰阵面后不同位置的流团所对应的燃时压力  $p_f$  的值是不一样的, 由于容器内的压力在燃烧过程中不断上升, 故愈接近容器中心的流团对应的燃时压力愈低。由(6-60)式可知, 燃时压力愈低流团的温度愈高。因此, 火焰阵面后的流场温度分布是不均匀的, 愈接近点火中心温度愈高, 如图 6-11 所示, 称此为马赫效应。燃烧结束时, 中心处的温度达到最大值



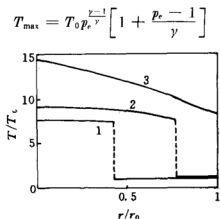


图 6-11 密闭容器内的温度分布

#### 四、流场数值解<sup>[9]</sup>

前节讨论, 火焰被处理为数学间断, 流场因此分为两部分, 守恒方程不再含有与反应有关的源项。如此获得的解基本揭示了燃烧诱发的流场的特征。如果考虑火焰的宽度和内部结构, 则需讨论带反应源项的守恒方程, 球坐标中,  $P_r = 1, L_r = 1$  时

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0 \quad (6-65)$$

$$p = p(t) \quad (6-66)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu c_p \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{\omega}_s Q_s \quad (6-67)$$

$$\rho \left( \frac{\partial Y_s}{\partial t} + u \frac{\partial Y_s}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu \frac{\partial Y_s}{\partial r} \right) - \dot{\omega}_s \quad (6-68)$$

$$p = \bar{R} T \rho \quad (6-69)$$

令  $\psi = T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ , 方程(6-67)和(6-69)式分别写成

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rho c_p \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = c_p p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \dot{\omega}_s Q_s \quad (6-70)$$

$$p^{\frac{1}{\gamma}} = \bar{R} \rho \psi \quad (6-71)$$

引进拉格朗日坐标

$$q = \int_0^r \rho r^2 dr / M$$

其中  $M = \frac{1}{3} r_0^3 \rho_0$ , 于是

$$r^2 \rho u = -M \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right) \quad (6-72)$$

对方程(6-70)和(6-68)式进行坐标变换

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_q &= \kappa \frac{\partial}{\partial q} \left( r^4 \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)_t \right) + \frac{\dot{\omega}_s Q_s}{\rho c_p p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \\ \left( \frac{\partial Y_s}{\partial t} \right)_q &= \kappa \frac{\partial}{\partial q} \left( r^4 \left( \frac{\partial Y_s}{\partial q} \right)_t \right) - \frac{\dot{\omega}_s}{\rho} \end{aligned}$$

设燃烧方程式为

$$\{F\} + a\{O\} + \{I\} \rightarrow (1+a)\{P\} + \{I\}$$

其中  $F, O, I$  和  $P$  分别表示燃料、氧化剂、惰性介质和燃烧产物, 用脚标 1, 2, 3, 4 来表示。反应速率采用 Arrhenius 公式时

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= A \exp \left( -\frac{E_s}{RT} \right) \rho^2 Y_1 Y_2 \\ \dot{\omega}_2 &= a \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_4 &= -(1+a) \dot{\omega}_1 \end{aligned}$$

于是守恒方程可写成通式

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial q} \left( r^4 \frac{\partial A}{\partial q} \right) + S \quad (6-73)$$

其中  $A = (Y_1 Y_2 \psi)^T$ ,  $S = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\omega}_1}{\rho} & -\frac{a\dot{\omega}_1}{\rho} & \frac{Q_1 \dot{\omega}_1}{\rho c_p p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \end{pmatrix}^T$ , 上标  $T$  表示转置。这是一个带有源项的扩散方程, 可通过数值方法求解。

根据(6-73)式求得的解还需转换到欧拉坐标中去。由(6-71)式, (6-66)式和(6-72)式得

$$p^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{3M\bar{R}}{r_0^3} \int_0^1 \psi dq \quad (6-74)$$

或

$$r^3 = \frac{3M\bar{R}}{p^{\frac{1}{\gamma}}} \int_0^q \psi dq \quad (6-75)$$

由(6-65)式得

$$u = -\frac{M}{\rho r^2} \int_0^q \left( \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dq \quad (6-76)$$

综上所述,拉格朗日坐标向欧拉坐标转换时,首先根据(6-74)式由  $\psi(q)$  求得  $p$ ,进而由(6-75)式把  $q$  换成  $r$ ,从而得到  $T(r)$  和  $\rho(r)$ ,  $u(r)$  由(6-76)式求得。图 6-12 为由计算获得的流场温度分布曲线。

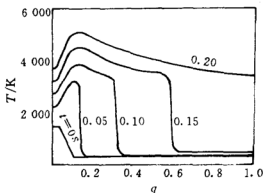


图 6-12 密闭容器内温度分布的数值计算结果

## 6.2.2 粉尘爆炸

密闭容器中可燃混合物的燃烧,无论是均相还是非均相,皆可能导致爆炸。描述这类爆炸的特性参数包括最大爆炸压力  $p_{\max}$ 、最大压力上升速率  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$ 、可燃极限和最小点火能<sup>[10]</sup>。

与气相比,粉尘爆炸的复杂性不仅表现在燃烧机理方面,而且粉尘的颗粒的形状、大小、重力以及使颗粒悬浮而存在的湍流等都对爆炸特性具有重大影响。

大涡湍流使火焰阵面变形,小涡则增加反应区的输运效应,这都使燃烧速率增加。但湍流非常强时也可能导致熄火,因为高强度湍流的化学反应时间(包括颗粒加热、挥发、点火等过程)大于反应流块中的旋涡寿命,强烈的输运效应使燃烧释放的能量不足以支持火焰的传播。两种相反的效应使湍流对  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  的影响不具有单调性,图 6-13 为实验曲线<sup>[11]</sup>,  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  对应于某湍流强度取极大

值。湍流对  $p_{\max}$  的影响趋势基本与  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  相同,原因是该值受到粉尘完全燃烧的程度和管壁热损失的影响。低强度湍流,部分粉尘因重力沉降而不能悬浮燃烧,高强度湍流又会导致部分粉尘的熄火。燃烧速度增加时,壁面热损失将减少。

立方根定律也可推广到粉尘爆炸,有

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} V^{\frac{1}{3}} = K_{st}$$

该定律是比较粗糙的,  $K_{st}$  受到很多因素的影响很难保持常数,但它是一个十分有用的参数,可通过实验来测试。

可燃极限包括上限和下限,分别称为可燃最高浓度和最低浓度。对于某确定的点火能,存在一个浓度极限,如图 6-14 所示<sup>[12]</sup>。但这不是可燃极限,因为更大的点火能仍可能使其点燃。点火能愈小,可燃浓度范围愈小。随着点火能量的增加,极限值趋于定值。因此,可燃极限是指足够强的点火能量仍不能使系统点火的燃料浓度极限。

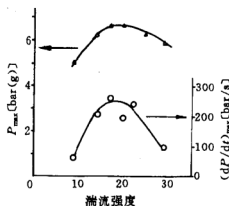


图 6-13 湍流对  $p_{\max}$  和  $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max}$  的影响

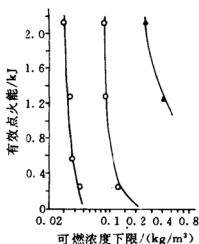


图 6-14 点火能量对可燃浓度下限的影响

湍流可影响可燃极限和最小点火能。点火能量一定时,湍流使可燃浓度范围明显变窄,Hertzber<sup>[8]</sup>认为湍流足够强、点火能量足

够大时,极限值趋于定值。

### 一、均相模型<sup>[13,14]</sup>

密闭容器中悬浮粉尘燃烧的均相模型假设:

(1)大小一致的球形颗粒点火前在空间均匀分布。

(2)因密闭容器中质点运动的平均速度较小,忽略两相间的速度差和温度差,采用均相模型,把颗粒视作混合物的一种组分。

(3)由于低马赫数,故压力在容器内无空间分布,即 $\frac{\partial p}{\partial r}=0$ 。

(4)气体为 Chapman 气体,即 $\gamma=\text{常数}$ , $\rho\mu=\text{常数}$ 。

(5)湍流采用混合长度模型,忽略化学反应速率的湍流脉动。

(6)层流和湍流的 Prandtl 数, Schmidt 数和 Lewis 数皆为 1。

其守恒方程与气相相同[即(6-65)式~(6-69)式]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) = 0$$

$$p = p(t)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \bar{k} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{\omega}_s Q_s$$

$$\rho \left( \frac{\partial Y_s}{\partial t} + u \frac{\partial Y_s}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho \bar{D} \frac{\partial Y_s}{\partial r} \right) - \dot{\omega}_s$$

$$p = \bar{R} T \rho$$

其中 $\bar{k}=k+k_T+k_R$ , $\bar{D}=D+D_T$ ,脚标 $T$ 和 $R$ 分别表示湍流和辐射,所有变量皆为平均值。引进变量 $\psi=Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ ,并对方程进行拉格朗日坐标转换

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial q} \left[ r^4 z \frac{\partial A}{\partial q} \right] + S \quad (6-77)$$

$$\text{其中 } A = (Y_1 \ Y_2 \ \psi)^T, z = (D^* \ D^* \ k^*)^T, \dot{S} = \left( -\frac{\dot{\omega}_1}{\rho} \quad -\frac{a\dot{\omega}_1}{\rho} \right. \\ \left. \frac{Q_1 \dot{\omega}_1}{\rho c_p p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right)^T, \alpha = \frac{\rho \mu}{M^2}, D^* = \frac{\bar{D}}{D} = \frac{v_T}{v} + 1, k^* = \frac{\bar{k}}{k} = \frac{v_T}{v} + \frac{k_R}{k} + 1.$$

根据 Abdel-Gayed 简单公式<sup>[15]</sup>

$$\frac{v_T}{v} = 11 R^{0.56} e T$$

其中  $ReT = \frac{u' L_T}{\nu}$ ,  $u'$  为脉动速度,  $L_T$  为旋涡尺寸。

辐射热传导系数采用如下近似公式<sup>[16]</sup>

$$k_R = \frac{16}{3} \sigma T^3 / a_R$$

其中  $\sigma$  为 Stefan-Boltzmann 常数,  $a_R$  为 Rosseland 平均吸收系数。

设点火能量为  $E_{ig}$ , 于是

$$E_u = E_{th0} + E_{ca0} \eta + E_{ig}$$

故

$$p = p_0 + (p_b - p_0) \eta + \frac{\bar{R}}{c_v V} E_{ig}$$

设点火瞬间  $\eta = \eta_0$ , 以此作为方程初始条件, 且用上标 0 表示, 有

$$p^0 = p_0 + (p_b - p_0) \eta + \frac{\bar{R}}{c_v V} E_{ig} \quad (6-78)$$

此时, 火焰阵面前后均被压缩, 故

$$p_c^{\frac{1}{\gamma}} (1 - \eta_0) = p^{\frac{1}{\gamma}} \left( 1 - \left( \frac{\mathcal{R}^0}{r_0} \right)^3 \right) \quad (6-79)$$

点火瞬间未燃物体积为  $V \left( 1 - \left( \frac{\mathcal{R}^0}{r_0} \right)^3 \right)$ , 质量为  $(1 - \eta_0) V \rho_0$ , 故密度为

$$\rho_u^0 = \frac{(1 - \eta_0) \rho_0}{1 - \left( \frac{\mathcal{R}^0}{r_0} \right)^3} \quad (6-80)$$

同样

$$\rho_b^0 = \frac{\eta_0 \rho_0}{\left( \frac{\mathcal{R}^0}{r_0} \right)^3} \quad (6-81)$$

根据状态方程

$$T_u^0 = \frac{p^0}{\bar{R} \rho_u^0} \quad (6-82)$$

$$T_b^0 = \frac{p^0}{\bar{R} \rho_b^0} \quad (6-83)$$

方程的边界条件为  $r=0$  和  $r=r_0$  处,  $\frac{\partial Y_i}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ 。

图 6-15 为密闭容器中铝粉爆炸的计算曲线, 其中 (a) 为不同体积的容器内压力随时间的变化曲线, (b) 为 20l 容器内温度分布

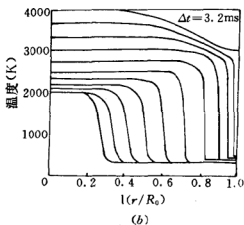
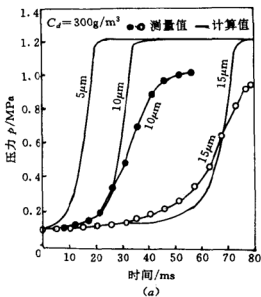


图 6-15 密闭容器中的铝粉爆炸  
 $r/R_0$ —容器的中间位置。

曲线。

## 二、颗粒轨道模型<sup>[17]</sup>

颗粒轨道模型将颗粒分成若干颗粒群，每群颗粒用单个颗粒来替代，气相采用欧拉坐标，颗粒采用拉格朗日坐标。当马赫数较低，反应仅出现在气相时，气相方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = - \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} \quad (6-84)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_s) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j Y_s) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - \delta_{sj} \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} - \dot{\omega}_s \end{aligned} \quad (6-85)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j c_p T) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} \\ & - \pi N_s k d_k \sum \frac{n_{pk}(T - T_{pk})}{m_{pk}} - c_p T \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} + \dot{\omega}_s Q_s \end{aligned} \quad (6-86)$$

其中  $\delta_{sj}$  为  $\delta$  函数, 仅当  $s=j$ , 即所讨论的组元为颗粒气化组元时其值为 1, 否则为零。利用 (6-84) 式, 方程 (6-85) 和 (6-86) 式又可写成

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial Y_s}{\partial t} + u_j \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \rho \frac{\partial Y_s}{\partial x_j} \right) - (\delta_{sj} - Y_s) \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} - \dot{\omega}_s \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial T}{\partial x_j} \\ &+ \frac{dp}{dt} - \pi N_s k d_k \sum \frac{n_{pk}(T - T_{pk})}{m_{pk}} + \dot{\omega}_s Q_s \end{aligned}$$

令  $\psi = T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ , 于是上式写成

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \\ &- p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left( \pi N_s k d_k \sum \frac{n_{pk}(T - T_{pk})}{m_{pk}} - \dot{\omega}_s Q_s \right) \end{aligned}$$

对于一维球对称流场,  $P_r=1, L_e=1$  时

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u) = - \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} \quad (6-87)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Y_s}{\partial t} + \rho u \frac{\partial Y_s}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu \frac{\partial Y_s}{\partial r} \right) \\ = - (\delta_{sj} - Y_s) \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} - \dot{\omega}_s \end{aligned} \quad (6-88)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ = - p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \pi N_s \mu d_k \sum \frac{n_{pk}(T - T_{pk})}{m_{pk}} + \frac{p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{c_p} \dot{\omega}_s Q_s \end{aligned} \quad (6-89)$$

积分 (6-87) 式得



$$\int_0^r \frac{\partial \rho}{\partial t} r^2 dr + \int_0^r (\sum n_{pk} \dot{m}_{pk}) r^2 dr + r^2 \rho u = 0 \quad (6-90)$$

$$\int_0^{r_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} r^2 dr = - \int_0^{r_0} (\sum n_{pk} \dot{m}_{pk}) r^2 dr \quad (6-91)$$

完全气体状态方程

$$p^{\frac{1}{\gamma}} = \rho R \psi \sum \frac{Y_s}{W_s} \quad (6-92)$$

颗粒守恒方程

$$\frac{du_{pk}}{dt_{pk}} = \frac{u - u_{pk}}{\tau_u} \quad (6-93)$$

$$\frac{dT_{pk}}{dt_{pk}} = \frac{T - T_{pk}}{\tau_T} \quad (6-94)$$

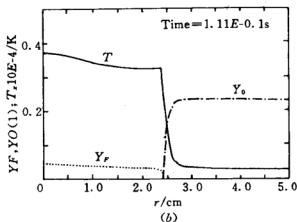
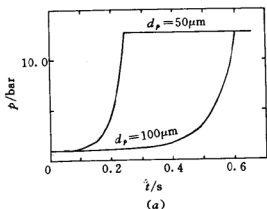


图 6-16 密闭容器中的煤粉爆炸

上述方程组需数值方法求解,例如用显式格式从方程(6-88)和(6-89)式中求出  $Y_s$  和  $\psi$ ,再由方程(6-91)和(6-92)式求出  $\rho, p$  和  $T$ ,由方程(6-90)求得  $u$ 。

Continillo<sup>[17]</sup>讨论密闭容器中煤粉爆炸时,设仅煤的热解挥发分在气相燃烧,其热解速率用 Arrhenius 形式的方程表示

$$\dot{m}_{pk} = -A \exp\left(-\frac{E_s}{RT_p}\right) m_{pk} \quad (6-95)$$

计算结果如图 6-16 所示,其中(a)为不同大小的颗粒压力随时间变化曲线;(b)为某时刻,温度和质量分数的分布曲线。

### 6.2.3 气云爆炸<sup>[18,19]</sup>

仅讨论平面一维问题,设大小一致的单组分液滴在容器中均匀分布,忽略相互作用和热辐射,忽略管壁损失,采用颗粒轨道模型,  $M \ll 1$  时气相守恒方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = - \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} \quad (6-96)$$

$$\frac{\partial \rho Y_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y_s) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\rho \frac{\partial Y_s}{\partial x}\right) - \delta_{sF} \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} - \dot{\omega}_s \quad (6-97)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dp}{dt} + \dot{\omega}_s Q_s \\ &- \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} (c_p(T - T_p) + H_k) \end{aligned} \quad (6-98)$$

其中  $H_k$  为考虑液滴加热过程的有效气化潜热,参照(4-78)式<sup>[20]</sup>得

$$H_k = \frac{(1 - Y_{FkS})(c_p(T - T_p) + \beta \delta_F Y_0 Q_F)}{Y_{FkS} + \beta \delta_F Y_0 - (1 - \delta_F)(1 + \beta Y_0)Y_{Fk}} \quad (6-99)$$

其中脚标 0 和 F 表示氧化剂和燃料,  $k$  表示第  $k$  组液滴,  $S$  表示液滴表面。假设各组液滴温度相同,记作  $T_p, T_s$  与  $Y_{FkS}$  应满足 Clausius—Clapeyron 方程。纯蒸发液滴  $\delta_F = 0$ , 纯燃烧液滴  $\delta_F = 1$ 。实验表明,许多情况下,气云中的单颗液滴被火焰所包围,这将加强两相间的输运效应,因此  $\delta_F$  在 0 到 1 之间取值。

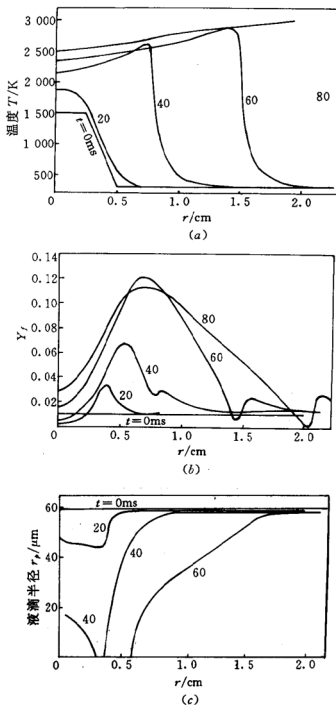


图 6-17 密闭容器中的辛烷( $C_8H_{18}$ )爆炸

(a)气相温度分布;(b)燃料蒸气质量分布;(c)液滴直径分布。

考虑对流效应时,质量消耗率采用 Ranz-Marshall 型公式

$$\dot{m}_{pk} = (1 + 0.3R_{c,pk}^{0.5})4\pi r_{pk}\mu \ln \left[ \frac{1 - (1 - \delta_F)Y_F - \delta_F\beta Y_0}{1 - Y_{F,ks}} \right] \quad (6-100)$$

气相反应采用二级不可逆 Arrhenius 公式

$$\dot{\omega}_F = A\rho^2 Y_0 Y_F e^{-E_a/RT} \quad (6-101)$$

令  $\psi = T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ , (6-98)式可写成

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= \frac{p}{c_p} \frac{1-\gamma}{\gamma} (\dot{\omega}_s Q_s \\ &- \sum n_{pk} \dot{m}_{pk} (c_p (T - T_p) + H_k)) \end{aligned} \quad (6-102)$$

液滴守恒方程为

$$\frac{\partial m_{pk}}{\partial t} + \frac{\partial m_{pk} u_{pk}}{\partial x} = 0 \quad (6-103)$$

$$\frac{\partial r_{pk}}{\partial t} + u_{pk} \frac{\partial r_{pk}}{\partial x} = \frac{\dot{m}_{pk}}{4\pi r_{pk}^2 \rho_l} \quad (6-104)$$

$$\frac{\partial u_{pk}}{\partial t} + u_{pk} \frac{\partial u_{pk}}{\partial x} = \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_l} r_{pk} C_D (u - u_{pk}) |u - u_{pk}| \quad (6-105)$$

$$\frac{4}{3} \pi r_{pk}^3 \rho_l c_p \left[ \frac{\partial T_p}{\partial t} + u_{pk} \frac{\partial T_p}{\partial x} \right] = \dot{m}_{pk} (H_k - L_v) \quad (6-106)$$

上述方程的数值计算结果如图 6-17 所示。

## 6.3 火焰诱导激波

### 6.3.1 匀速火焰诱导的激波<sup>[21,22]</sup>

燃烧产物的膨胀使火焰阵面前的介质受到压缩,因此,火焰阵面类似于漏气的活塞在前方介质中产生压缩波,甚至激波。当火焰传播速度为定值时,由此诱导的激波强度也为定值,两者之间为非定常流。量纲分析表明<sup>[23]</sup>,该区域有自模拟解。

#### 一、活塞诱导的激波

理想流体的一维非定常守恒方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + j \frac{\rho u}{r} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^j} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho^j} \right) = 0$$

其中  $j=0,1,2$  分别表示平面、柱和球坐标。匀速运动的活塞所诱导的流场具有自模拟解<sup>[23]</sup>, 引入自模拟变量  $\xi = \frac{r}{Dt}$  和无量纲量

$$\mathcal{F} = \frac{t}{r} u, \mathcal{D} = \frac{p}{\rho_0 D^2}, \mathcal{R} = \frac{\rho}{\rho_0}, \mathcal{Z} = \left( \frac{t}{r} a \right)^2$$

其中  $D$  为激波波速,  $a$  为声速, 脚标 0 表示激波波前状态。上述方程变换为

$$\xi \left( (\mathcal{F} - 1) \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} + \mathcal{F}' \right) + (j+1) \mathcal{F} = 0 \quad (6-107)$$

$$\xi \left( (1 - \mathcal{F}) \mathcal{F}' - \frac{1}{\xi} \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{R}} \right) = (\mathcal{F} - 1) \mathcal{F} \quad (6-108)$$

$$\frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} - \gamma \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = 0 \quad (6-109)$$

其中, 表示  $\frac{d}{d\xi}$ 。根据  $\mathcal{Z}$  的定义  $\xi^2 \mathcal{Z} = \frac{\gamma \mathcal{D}}{\mathcal{R}}$ , 故

$$\frac{2}{\xi} + \frac{\mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}} = (\gamma - 1) \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} \quad (6-110)$$

由此式、(6-109)式和(6-107)式可得

$$\frac{1}{1-\gamma} \frac{d \ln \mathcal{Z}}{d \ln \xi} - \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}-1} \frac{d \ln \mathcal{F}}{d \ln \xi} = \frac{2}{\gamma-1} + \frac{(j+1) \mathcal{F}}{\mathcal{F}-1}$$

由(6-110)式和(6-108)式得

$$(1 - \mathcal{F}) \mathcal{F} \frac{d \ln \mathcal{F}}{d \ln \xi} - \frac{\mathcal{Z}}{\gamma-1} \left( 2 + \frac{d \ln \mathcal{Z}}{d \ln \xi} \right) = \mathcal{F} (\mathcal{F} - 1)$$

由上述两式得

$$\frac{d \ln \xi}{d \ln \mathcal{F}} = - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} + j \mathcal{Z}} \quad (6-111)$$

$$\frac{d \ln \mathcal{Z}}{d \ln \xi} = - \frac{2 \mathcal{D} + j(\gamma-1)(1-\mathcal{F}) \mathcal{F}}{\mathcal{D}}$$

其中  $\mathcal{D} = \mathcal{Z} - (1 - \mathcal{F})^2$ , 于是

$$\frac{d \ln \mathcal{Z}}{d \ln \mathcal{F}} = \frac{2\mathcal{D} + j(\gamma - 1)(1 - \mathcal{F})\mathcal{F}}{\mathcal{D} + j\mathcal{Z}} \quad (6-112)$$

该方程是自洽的, 活塞界面为其初始条件, 即

$$\mathcal{F}_1 = 1 \text{ 时} \quad \mathcal{Z}_1 = \frac{K}{\gamma}$$

其中  $K$  是参数, 可决定激波波速  $D$ 。由激波关系式

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma - (\gamma - 1)\eta}{(\gamma + 1)\eta} \quad (1-104)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\eta} \quad (1-105)$$

$$\frac{u_1}{a_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \eta}{\sqrt{\eta}} \quad (1-106)$$

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = \frac{(2\gamma - (\gamma - 1)\eta)(\gamma - 1 + 2\eta)}{(\gamma + 1)^2\eta}$$

其中  $\eta = \frac{1}{M_s^2}$ , 脚标 1 表示激波波后, 有

$$\mathcal{Z}_1 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} - \eta \right) \left( \frac{\gamma - 1}{2} + \eta \right)$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{2}{\gamma + 1} (1 - \eta)$$

$$\text{故} \quad \mathcal{Z}_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - \mathcal{F}_1) \left( \frac{2}{\gamma - 1} + \mathcal{F}_1 \right) \quad (6-113)$$

由初始条件积分(6-112)式, 当  $\mathcal{Z}$  与  $\mathcal{F}$  满足(6-113)式时为激波阵面, 积分终止。根据  $\mathcal{F}_1$  (或  $\mathcal{Z}_1$ ) 可求得  $\eta$  (或  $D$ ), 进而求得  $p_1$ 、 $\rho_1$ 、 $u_1$  和  $a_1$  等参数。知道  $\mathcal{F}$  与  $\mathcal{Z}$  的关系后, (6-111)式成为自洽方程,

其初始条件为  $\mathcal{F}_1 = 1$  时  $\frac{d \ln \xi}{d \ln \mathcal{F}} = -\frac{1}{j+1}$ , 从而解得  $\mathcal{F}(\xi)$  和  $\mathcal{Z}(\xi)$ 。

根据定义式  $u = D\xi\mathcal{F}(\xi)$ ,  $a^2 = D^2\xi\mathcal{Z}(\xi)$  和等熵方程

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} \quad (6-114)$$

可求得活塞与激波间的参数分布。

$j=0$  时, 有

$$\frac{d \ln \mathcal{Z}}{d \ln \mathcal{F}} = 2$$

$$\frac{d \ln \xi}{d \ln \mathcal{F}} = -1$$

其初始条件为  $\mathcal{F}_r = 1$  时,  $\mathcal{Z}_r = \frac{\xi_r}{\gamma}$ ,  $\xi_r = \xi_r$ , 故

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_r \mathcal{F}^2 \quad (6-115)$$

$$\xi = \xi_r \mathcal{F}^{-1} \quad (6-116)$$

进而有  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_1 \mathcal{F}_1^2$  (6-117)

$$\xi_1 = \xi_1 \mathcal{F}_1^{-1} \quad (6-118)$$

由(6-113)式和(6-117)式求得  $\mathcal{Z}_1$  和  $\mathcal{F}_1$ , 进而由(6-118)式求得  $\xi_1$ , 通过(6-115)式和(6-114)式得到  $\mathcal{F}(\xi)$  和  $\mathcal{Z}(\xi)$ 。

激波很弱时,  $\eta \rightarrow 1$ , 故  $\mathcal{F}_1 \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{Z}_1 \rightarrow 1$ ,  $\mathcal{D} \rightarrow 0$ 。但  $\mathcal{F} = 0$ ,  $\mathcal{Z} = 1$  是方程的奇点, 这给计算带来困难。将弱激波视作声波, 有波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{D^2}{r^j} \left( r^j \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

其中  $\phi$  为速度势, 满足  $-\frac{\partial \phi}{\partial r} = u$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{p - p_0}{\rho_0}$ 。引入无量纲量  $\xi = \frac{r}{D}$  和

$f = \frac{\phi}{t}$ , 上式写成

$$\xi(1 - \xi^2)f'' + jf' = 0$$

$$u = -\frac{f'}{D}$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{D^2}(f - \xi f')$$

当  $\xi = \xi_r$  时,  $u = -\frac{1}{D}(f')$ ,  $= D\xi_r$ , 故

$$f' = \frac{C_j}{\xi^j} (1 - \xi^2)^{\frac{j}{2}} \quad (6-119)$$

其中

$$C_j = -\frac{D^2 \xi_r^{j+1}}{(1 - \xi_r^2)^{j/2}}$$

即

$$u = D\xi_r \left( \frac{\xi_r}{\xi} \right)^j \left( \frac{1 - \xi_r^2}{1 - \xi^2} \right)^{\frac{j}{2}} \quad (6-120)$$

声波阵面上,  $\xi=1, p=p_0$  或  $f=f'$ , 由(6-119)式得

$$\frac{p}{p_0} = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma \xi_p^2}{\sqrt{1 - \xi_p^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} & j = 1 \\ 1 + \frac{2\gamma \xi_p^2}{1 - \xi_p^2} \frac{1 - \xi}{\xi} & j = 2 \end{cases} \quad (6-121)$$

根据  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{Z}$  的定义

$$\mathcal{F} = \left( \frac{\xi_p}{\xi} \right)^{j+1} \left( \frac{1 - \xi^2}{1 - \xi_p^2} \right)^{j/2}$$

$$\mathcal{Z} = \begin{cases} \frac{1}{\xi^2} \left\{ 1 + \frac{\gamma \xi_p^2}{\sqrt{1 - \xi_p^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} & j = 1 \\ \frac{1}{\xi^2} \left\{ 1 + \frac{2\gamma \xi_p^2}{1 - \xi_p^2} \frac{1 - \xi}{\xi} \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} & j = 2 \end{cases} \quad (6-122)$$

## 二、匀速火焰诱导的激波

匀速火焰诱导的流场如图 6-18 所示, 直线  $S$  和  $F$  分别表示激波与火焰轨迹。流场分为三个区域, 即(I)区为激波前未扰动区; (II)区为激波与火焰间的非定常区; (III)区为火焰后已燃区。

用脚标 0, 1 分别表示激波阵面前后; 2, 3 分别表示火焰阵面前后, 设(III)区流场均匀,  $u_3=0$ , 于是, 火焰阵面的守恒方程为

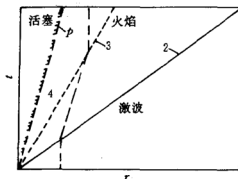


图 6-18 火焰诱导的流场  $r-t$  图



$$\frac{u_2}{S} = v_4 - 1 \quad (6-123)$$

$$\frac{p_3}{p_2} = 1 + \gamma_2(1 - v_4) \left( \frac{S}{a_2} \right)^2 \quad (6-124)$$

其中  $v_4 = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{v_3}{v_2}$  称为膨胀比,  $S$  为燃烧速度。根据  $\mathcal{Z}$  的定义, (6-124)式可写成

$$P_4 = \frac{p_3}{p_2} = 1 + \frac{\gamma_2}{\mathcal{Z}_2} \frac{1 - v_4}{v_4^2} \quad (6-125)$$

质点状态的变化过程用图 6-19 来描述。经激波作用后, 质点由状态 0 突跃至状态 1, 该点落在过 0 点的绝热 Hugoniot 曲线  $H_0$  上。此后, 沿等熵线  $S$  经连续等熵压缩至状态 2 点火, 燃烧过程沿 Rayleigh 线  $RL$  进行至状态 3, 该点落在以 2 点为初始态的全燃烧 Hugoniot 曲线  $H_2(1)$  上。以 0 点为初始态的全燃烧 Hugoniot 曲线记作  $H_0(1)$ 。

Hugoniot 方程可近似写成双曲线方程

$$(P_4 + \beta)(v_4 - \beta) = (1 + \beta)(v_f - \beta) \quad (6-126)$$

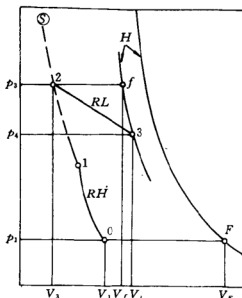


图 6-19 火焰诱导激波的  $p-v$  平面

其中  $\beta = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}$ ,  $v_F = \frac{v_F}{v_2}$ , 脚标  $F$  对应于图 6-19 中  $F$  点, 为等压燃烧膨胀比。由 (6-125) 式和 (6-126) 式得

$$v_F = v_d + \frac{\gamma_2}{2} \frac{(1 - v_d)(v_d - \beta)}{(1 + \beta)v_d^2} \quad (6-127)$$

图 6-20 为燃烧过程中比焓—温度关系曲线, 从状态 2 经燃烧

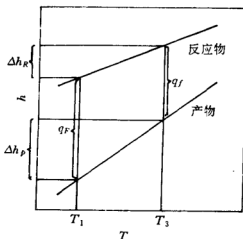


图 6-20 比焓—温度关系曲线

至状态 3 时, 比焓的变化为

$$\Delta h_1 = q_f$$

从状态 2 变化至状态 0, 经燃烧至状态  $F$ , 再变化至状态 3 所导致的比焓变化为

$$\Delta h_2 = C_{pR}(T_0 - T_2) + q_F + C_{pP}(T_2 - T_0)$$

脚标  $R$  和  $P$  表示未燃物和已燃物。根据 Hess 定律<sup>[24]</sup>

$$\Delta h_1 = \Delta h_2$$

即

$$q_f = q_F + \frac{a_2^2 - a_0^2}{\gamma_2 - 1} \left( 1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_3 - 1} \mathcal{M} \right) \quad (6-128)$$

其中  $\mathcal{M} = \frac{W_2}{W_3}$ ,  $q_F$  为标准状况下的燃烧热。由完全气体的火焰守恒方程

$$v_F = \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_3} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} + \gamma_2 \frac{q_F}{a_0^2} \right)$$

$$v_f = \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_3} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} + \gamma_2 \frac{q_f}{a_0^2} \right)$$

代入(6-128)式得

$$v_f = \left( \frac{a_0}{a_2} \right)^2 v_f + \left( 1 - \left( \frac{a_0}{a_2} \right)^2 \right) \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_3} \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_2 - 1} - \mathcal{M} \right) \quad (6-129)$$

设某运动活塞对流场的影响与火焰等价,根据定义

$$\mathcal{F}_2 = \frac{u_2}{S_f} \quad \text{即} \quad v_d = \frac{1}{1 - \mathcal{F}_2}$$

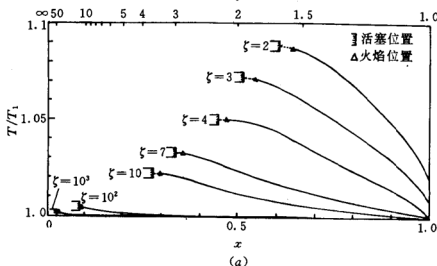
$$\frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_0} = \left( \frac{a_2}{a_0} \right)^2 \frac{1}{\xi_f^2}$$

脚标  $F$  表示火焰阵面,代入(6-129)式得

$$v_f = \xi_f^2 \left( \frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_0} \right) \left( \frac{1}{1 - \mathcal{F}_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{Z}_2} \left( 1 + \frac{\gamma_3 - 1}{2} \mathcal{F}_2 \right) \right) - \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_3} \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_2 - 1} - \mathcal{M} \right) \left( \xi_f^2 \frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_0} - 1 \right) \quad (6-130)$$

按前节所述,由活塞表面逐点积分,当  $\xi$ ,  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{Z}$  满足(6-130)式时为火焰阵面, $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{Z}$  满足(6-113)式时为激波阵面,两阵面之间的解即为火焰诱导的流场的解,火焰后的流场由火焰守恒方程求得。

图 6-21 为计算绘制的流场参数分布曲线,其中  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  $\gamma_3 = 1.2$ ,  $\mathcal{M} = 1$ ,  $v_f = 7$ ,  $a_0 = 345\text{m/s}$ ,  $p_0 = 1\text{atm}$ ,  $\bullet$  表示活塞位



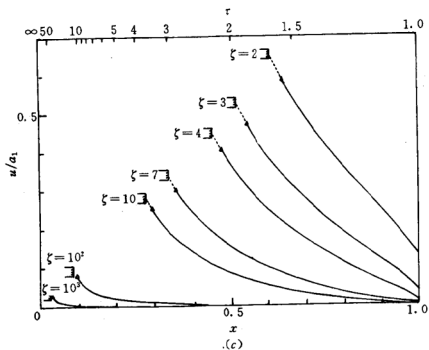
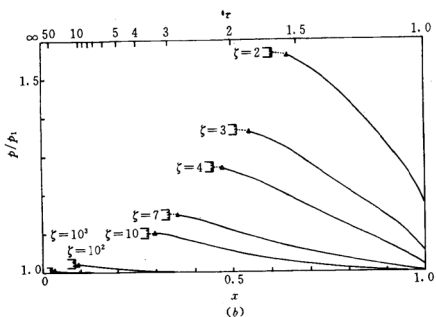


图 6-21 火焰诱导激波的流场参数分布

(a) 温度分布曲线; (b) 压力分布曲线; (c) 速度分布曲线。

置,  $\triangle$  表示火焰位置。

### 6.3.2 加速火焰诱导的激波

#### 一、阵面追踪法<sup>[25]</sup>

当火焰加速运动时, 激波与火焰阵面间的流场不再具有自模拟解。视火焰阵面为间断面, 作为内边界将流场分为两部分, 有守恒方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - a^2 u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

该方程可写成

沿  $C_+$  方向  $\frac{dx}{dt} = u + a$ , 有

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{du}{dt} = 0 \quad (6-131)$$

沿  $C_-$  方向  $\frac{dx}{dt} = u - a$ , 有

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{du}{dt} = 0 \quad (6-132)$$

沿  $P$  方向  $\frac{dx}{dt} = u$ , 有

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6-133)$$

因此,  $x-t$  平面上任意一点都有三个特征方向即  $C_+$  方向、 $C_-$  方向和  $P$  方向(颗粒运动方向)。介于  $C_+$  和  $C_-$  之间的方向称为类时向, 反之则为类空向。如果空间某曲线所有点的切线方向皆为类时向, 该曲线称为类时线, 同样每点皆为类空向的曲线称为类空线。显然, 类时线相对于质点是亚声速的, 类空线则是超声速的。

根据 1.2.3 节讨论, 火焰相对于阵面前后皆为亚声速, 且  $S_n >$

$u_*$  和  $S_* > u_b$ , 脚标  $u$  和  $b$  分别表示火焰未燃和已燃侧。因此, 对于阵面前后, 火焰轨迹线皆为类时线, 如图 6-22 所示<sup>[25]</sup>。因此火焰前侧有四个方程(关于  $C_-$  和  $P$  的特征方程和相容方程), 后侧有两个方程(关于  $C_+$  的特征方程和相容方程), 此外火焰两侧还有三个守恒方程

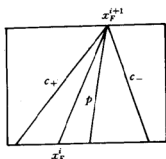


图 6-22 火焰阵面的确定性

$$\begin{aligned}\rho_* S_* &= \rho_b S_b \\ p_b - \rho_b S_b u_b &= p_u - \rho_u S_* u_* \\ h_b + \frac{S_b^2}{2} &= h_u + \frac{S_*^2}{2}\end{aligned}$$

其中  $h$  为比焓

$$h = \sum_i Y_i \left( \int_{T_0}^T C_{p,i} dT + h_i^0 \right)$$

上述方程并不封闭, 故火焰传播速度可任意选定。由于火焰间断面模型忽略了化学反应细节, 其传播速度需借助于其它模型或实验结果, 该值一经确定, 两侧流场便是唯一确定的。考虑到火焰诱导激波的现象, 求解守恒方程时需选用可以捕捉激波的计算格式。

根据上述讨论, 以悬浮铝粉在一端(点火端)封闭一端敞开的管内火焰诱导激波现象为算例<sup>[26]</sup>, 计算结果如图 6-23 所示。其中 (a) 为某些确定位置上压力随时间的变化曲线和据此描绘的火焰与激波轨迹, (b) 为管内速度分布曲线。

## 二、能量加入法<sup>[27]</sup>

忽略输运效应的一维化学反应流守恒方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \rho u r'}{\partial r} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{p}{r^j} \frac{\partial u r^j}{\partial r} = \dot{\omega}_s Q_s$$

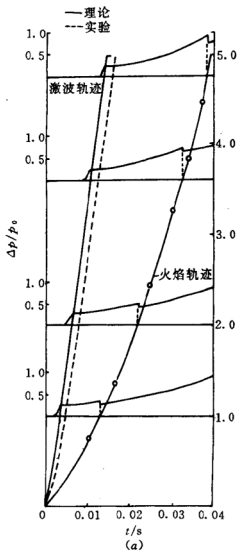
其中  $j=0,1,2$  分别表示平面、柱和球坐标。

引进拉格朗日坐标

$$q = \int_0^r \rho r^j dr$$

于是

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} = S \quad (6-134)$$



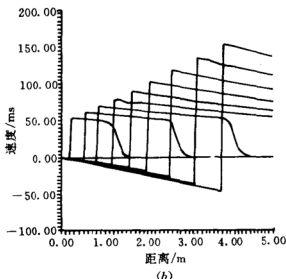


图 6-23 悬浮铝粉中的火焰诱导激波

其中

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \\ u \\ C_p T + \frac{u^2}{2} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -ur^j \\ pr^j \\ pur^j \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ jpr^{j-1} \\ \dot{Q} \end{bmatrix}$$

式中  $\dot{Q} = \frac{\omega_s Q_s}{\rho}$  表示单位质量混合物的能量释放率。

能量加入法假设流场自身没有化学反应,即方程(6-134)中  $S = (0 \quad i pr^{j-1} \quad 0)^T$ , 能量是从外界跟踪火焰在其前后一定宽度内(反应区宽度)逐渐加入的。为保证加入区域与外部流场的光滑连接,能量加入量在反应区内呈三角函数或指数分布,例如

$$\dot{Q} = \frac{Q_r}{16} [\cos(3\pi\delta) - 9\cos(\pi\delta) + 8]$$

其中  $\delta = \frac{q_r - q}{W}$ ,  $q_r$  为火焰位置,  $W$  为反应区宽度,  $Q_r$  为单位质量混合物燃烧释放的热。

根据上述思路编制的 Cloud<sup>[28]</sup> 程序利用人工粘性捕捉激波, Blast<sup>[29]</sup> 程序在欧拉坐标中利用 FCT 格式捕捉激波,但能量仍在拉格朗日坐标中加入。图 6-24 为小型肥皂泡内某点气云爆炸的压力



变化曲线<sup>[30]</sup>, (a) 为实验值, (b) 和 (c) 分别为 Cloud 程序和 Blast 程序的计算值。

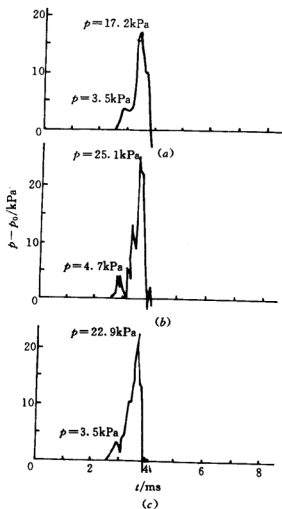


图 6-24 小型气云爆炸场某点的压力变化曲线

## 6.4 湍流加速火焰

### 6.4.1 管内火焰加速<sup>[31]</sup>

流团燃烧时, 因体积膨胀而对周围介质做功, 从而在火焰前方

形成压缩波,诱导和加速当地质点的运动。对于管内燃烧,如果考虑粘性和管壁附面效应,质点轴向速度在截面上呈抛物线分布,轴线处最大,壁面为零。火焰因此而变形,燃烧面积增大,燃烧速度加快。加速火焰的进一步推动又导致火焰阵面的更大变形,因此是一种正反馈的过程。由于壁面附近存在的粘性边界层,流速的增大会使管内出现湍流。大涡湍流使火焰皱褶,增加燃烧面积,小涡湍流可提高火焰内部的有效输运能力,这些都有助于提高燃烧速率。湍流强度随轴向流速的增加而增加。当湍流足够强时,未燃流团将被火焰所吞食形成燃烧的相干流块。这些流块在轴心附近温度高流速大,壁面附近温度低流速小。湍流脉动使已燃和未燃流块在轴向扩散,高温和低温流块在径向扩散,此时湍流燃烧速率往往决定于上述物理过程,而非化学过程。

根据量纲分析<sup>[32]</sup>

$$S_T \propto \sqrt{\frac{D}{t^*}}$$

其中  $S_T$  表示湍流燃烧速率;  $D$  为轴向湍流扩散系数,  $D \propto 10ru^*$ ,  $r$  为直管半径,  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  为摩阻速度,  $\tau_w$  为管壁剪应力;  $t^* \propto 10^{-1}r/u^*$  为管内湍流特征时间。上式还可写成

$$S_T \propto 10u^*$$

当  $Re$  数为  $10^7$  量级时,  $u^* \simeq \frac{u}{30}$ ,  $u$  为轴向时平均速度,故

$$S_T \simeq \frac{1}{3}u \quad (6-135)$$

该方程描述了火焰阵面前的流速对燃速的影响。

设有两端开口的无限长直管,  $t=0$  时刻管内压力与流速均匀, 记作  $p_0$  和  $u_0$ 。  $x=x_0$  处有一接触间断, 两侧温度分别为  $T_0(x>x_0)$  和  $T_1(x<x_0)$ , 随后, 该间断发展为向前传播的火焰从而影响管内流场。火焰两侧的守恒方程为

$$\begin{aligned} \rho_1(S_F - u_1) &= \rho_2(S_F - u_2) \\ p_1 + \rho_1(u_1 - S_F)u_1 &= p_2 + \rho_2(u_2 - S_F)u_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{1}{2}(S_F - u_1)^2 + Q = \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{1}{2}(S_F - u_2)^2$$

其中脚标 1、2 分别表示阵面前后。设火焰两侧熵增为常数

$$S_2 - S_1 = C_v \left[ \ln \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right] = \text{常数}$$

此时,火焰两侧皆为均熵流动,这要求流场中不出现激波。根据均熵流动关系式

$$\text{火焰前} \quad p = p_0 \left( 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$a = a_0 \left( 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_0} \right)$$

$$\text{火焰后} \quad p = p_0 \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_f} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho = \rho_f \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_f} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$a = a_f \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u - u_0}{a_f} \right)$$

$$\text{其中 } \rho_f = \left( \frac{T_0}{T_f} \right) \rho_0, a_f = a_0 \sqrt{\frac{T_f}{T_0}}.$$

由上述诸方程得

$$\frac{T_f}{T_0} (S_F - u_1) \left( 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u_1 - u_0}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$= (S_F - u_2) \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u_2 - u_0}{a_f} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$(S_F - u_2) \left\{ a_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u_1 - u_0}{a_0} \right)^2 + \gamma(u_1 - S_F)u_1 \right\}$$

$$= (S_F - u_1) \left\{ a_f^2 \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma-1) \frac{u_2 - u_0}{a_f} \right)^2 + \gamma(u_2 - S_F)u_2 \right\}$$

由上述两式消去  $u_2$  得

$$S_F = S_F(u_1) \quad (6-136)$$

该方程描述了火焰诱导的波前流动。

参见图 6-25,  $OK$  直线是根据 (6-135) 式绘制的,  $AA'$  和  $BB'$  是根据 (6-136) 式绘制的。 $AA'$  对应初速  $u_0$  较大, 它始终位于  $OK$  线左侧, 此时湍流诱导的火焰速度大于维持波前流动所需的火焰速度, 故火焰不断加速, 以致产生激波导致爆炸, 图中折线描述了这一反馈加速过程。 $BB'$  对应  $u_0$  较小, 它与  $OK$  线交于  $D$  点, 此时湍流诱导的火焰速度等于维持这种流动所需火焰速度, 故火焰可以稳定传播。因此, 存在一个临界初始流速  $u_0^*$ , 当初流速高于此值时, 系统存在爆炸的危险。

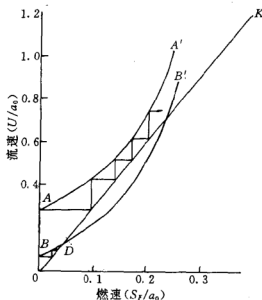


图 6-25 燃速与流速间的正反馈

如果管内为悬浮流(粉尘云或气云), 颗粒的存在将影响管内流场。当颗粒动量弛豫时间与湍流特征时间同一量级时, 两相间出现相对运动, 但颗粒不出现脉动, 这使得湍流强度降低。湍流会增加两相间的热传导和颗粒表面的质量扩散, 从而增加其燃烧速率。尽管如此, 颗粒燃烧的特征时间  $\tau_b$  仍较气相的大。当  $\tau_b$  大于相干流场的寿命时, 燃烧速率由化学反应控制, 此时

$$S_T \propto \frac{D}{\tau_b} = \sqrt{\frac{10ru^*}{\tau_b}}$$

因此,对于两相系统,  $t^* > \tau_B$  即  $u^* < 0.1 \frac{\lambda_2^2 r}{\lambda_1^2 \tau_B}$  或  $u < 3 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{r}{\tau_B}$  时

$$S_T \sim 10\lambda_1 u^* \sim \frac{\lambda_1}{3} u \quad (6-137)$$

当  $t^* < \tau_B$ , 即  $u^* > 0.1 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{r}{\tau_B}$  或  $u > 3 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{r}{\tau_B}$  时

$$S_T \sim \lambda_2 \sqrt{\frac{10ru^*}{\tau_B}} \sim \lambda_2 \sqrt{\frac{ru}{3\tau_B}} \quad (6-138)$$

其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  为可调参数,用于协调某些参数的不确定性。用(6-137)式和(6-138)式替代(6-135)式,燃速与流速的反馈曲线如图 6-26 所示,其中  $OK$  线是根据(6-137)式绘制的,  $KK'$  线是根据(6-138)式绘制的,前者对应于大管径,后者对应于小管径。显然,小管径对应的初始临界流速  $u_0^*$  较大,且随管径的减小而增加,如图 6-27 所示。

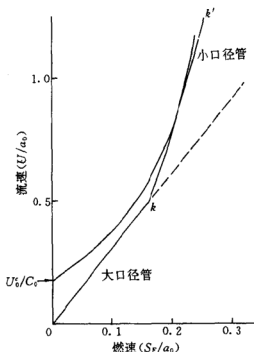


图 6-26 两相体系燃速与流速的关系曲线

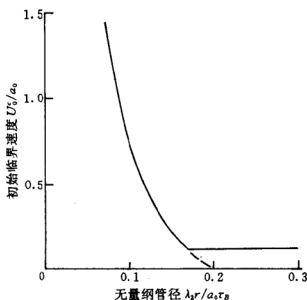


图 6-27 初始临界速度随管径的变化

## 6.4.2 障碍物导致的火焰加速

### 一、简单分析<sup>[33]</sup>

火焰的传播可以诱导前方质点的流动。如果在火焰所到之处预先重复设置障碍,这种流动将在障碍物附近形成高梯度的粘性边界层,从而导致湍流。湍流使火焰加速,加速火焰又增强湍流,这种正反馈作用使火焰不断加速。图 6-28 为障碍物导致火焰加速的实验照片<sup>[33]</sup>。

现讨论如图 6-29 所示的简单问题。一根一端封闭一端敞开的方管,封闭端为点火端,顶盖钻有漏气孔,底部重复设置障碍隔板。障碍物的存在使火焰变形,阵面分为两部分:引导阵面和变形阵面,前者面积为  $A_f$  后者为  $A_0$ ,燃烧总面积  $A_T = A_f + A_0$ 。

已燃气体质量变化率为

$$\frac{dm_b}{dt} = \rho_u S A_f + \rho_u A_0 S, \quad (6-139)$$

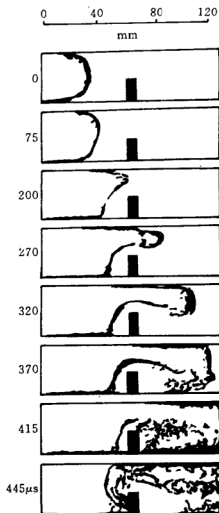


图 6-28 障碍物导致的火焰加速

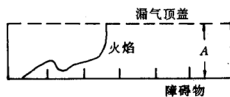


图 6-29 障碍物加速火焰示意图

其中脚标  $u$  和  $b$  分别表示未燃和已燃部分,  $S$  和  $S_r$  分别表示引导阵面和变形阵面上的燃烧速率。其值还应等于反应产物在管内增加率与对外排放率的和, 即

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{d(\rho_b V_b)}{dt} + \frac{dm_{rb}}{dt} \quad (6-140)$$

其中  $V_b$  为已燃物的体积,  $\frac{dm_{rb}}{dt}$  为排放率。设管内压力仅随时间变化而无空间分布且燃烧产物满足等熵方程

$$\frac{p}{\rho_b^{\gamma_b}} = \text{常数}$$

于是

$$\frac{d\rho_b V_b}{dt} = \rho_b \frac{dV_b}{dt} + \frac{V_b \rho_b}{\gamma_b p} \frac{dp}{dt} \quad (6-141)$$

将(6-140)式, (6-141)式代入(6-139)式得

$$\rho_u A_f S + \rho_u A_0 S_r = \rho_b \frac{dV_b}{dt} + \frac{V_b \rho_b}{\gamma_b p} \frac{dp}{dt} + \frac{dm_{rb}}{dt} \quad (6-142)$$

其中  $\frac{dV_b}{dt} = A_f \dot{R}_f + \int S_r dA_r$ ,  $\dot{R}_f$  为火焰引导阵面的传播速度,  $A_r$  为组成变形阵面的相干流块的燃烧表面积。设方管宽度为  $W$ , 有  $\int S_r dA_r = \int_0^{R_f} S_r W dx$ ,  $S_r$  为  $x$  的函数, 在完全燃烧区域其值为零,  $R_f$  为引导阵面位置。由(6-141)式和(6-142)式得

$$\begin{aligned} \dot{R}_f = \frac{\rho_u}{\rho_b} S + \left( \frac{\rho_u}{\rho_b} - 1 \right) \frac{\int_0^{R_f} S_r W dx}{A_f} - \frac{V_b}{A_f \gamma_b p} \frac{dp}{dt} \\ - \frac{1}{\rho_b A_f} \frac{dm_{rb}}{dt} \end{aligned} \quad (6-143)$$

同样, 未燃气体有

$$\dot{R}_f = S + \frac{V - V_b}{A_f \gamma_u p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho_u A_f} \frac{dm_{ru}}{dt} \quad (6-144)$$



其中  $V$  为方管体积,  $\frac{dm_{\infty}}{dt}$  为未燃气的排放率。

根据 Bradley 和 Mitcheson 的推导<sup>[34,35]</sup>

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{dm_{\infty}}{dt} = C \varepsilon R_f a_b M_{\infty}$$

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{dm_{\infty}}{dt} = C(A_v + \varepsilon(L - R_f)\beta) a_* M_{\infty}$$

其中  $\varepsilon = \frac{\text{盖板漏气面积}}{\text{盖板总面积}}$  称为漏气度,  $\beta$  为方管周长,  $L$  为管长,  $A_v$  为散开端开口面积,  $c=0.7$  为漏气系数。对于亚声速排气, 即  $P < P_c$

$$M_v = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{P} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ 1 - \left( \frac{1}{P} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

对于声速排气, 即  $P > P_c$

$$M_v = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

其中  $P = \frac{p}{p_a}$ ,  $P_c = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$ ,  $p_a$  为管外压力。

引进无量纲量

$$\bar{R}_f = \frac{R_f}{L}, \tau = \frac{t}{t_0}, t_0 = \frac{L}{S_0}, \bar{S} = \frac{S}{S_0}, \dot{\bar{R}}_f = \frac{\dot{R}_f}{S_0}$$

其中  $S_0$  为层流燃烧速度。于是方程(6-143)和方程(6-144)写成

$$\begin{aligned} \dot{\bar{R}}_f = \frac{\rho_a}{\rho_b} \bar{S} + \left( \frac{\rho_a}{\rho_b} - 1 \right) \frac{\int_0^{\bar{R}_f} S_f W dx}{A_f} - \frac{\bar{R}_f}{\gamma_b} \cdot \frac{A}{A_f} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\tau} \\ - C \varepsilon \bar{R}_f \frac{L \beta}{A_f} \frac{a_b}{S_0} M_{\infty} \end{aligned} \quad (6-145)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{R}}_f = \bar{S} + (1 - \bar{R}_f) \frac{A}{A_f} \frac{1}{\gamma_a} \frac{1}{P} \frac{dP}{d\tau} \\ + C \left( \frac{A_v}{A_f} + \varepsilon(1 - \bar{R}_f) \left( \frac{L \beta}{A_f} \right) \right) \frac{a_*}{S_0} M_{\infty} \end{aligned} \quad (6-146)$$

其中  $A = \frac{V_b}{R_f}$  为方管等效截面。

式中  $S$  和  $S_f$  分别与引导阵面前的流场和组成变形阵面的相

干流块的结构有关。当火焰传播速度较低时,  $S$  和  $S_f$  皆等于层流燃烧速度  $S_0$ 。湍流强度增加时,  $S$  和  $S_f$  也增加, Lefebvre<sup>[36]</sup> 给出的简单关系式为

$$\frac{S}{S_0} = 1 + D_1 u'_{rms} + D_2 u$$

其中  $u'_{rms}$  为湍流脉动均方差速度,  $u$  为时均值,  $D_1$  和  $D_2$  为常数。当  $u_0 = 0$  时, 根据火焰两侧质量守恒方程

$$u = \dot{R}_f \left( \frac{\rho_a}{\rho_b} - 1 \right) / \left( \frac{\rho_a}{\rho_b} \right) \quad (6-147)$$

如果假设  $u'_{rms}$  正比于  $u$ , 于是

$$\frac{S}{S_0} = 1 + C_1 u \quad (6-148)$$

$$\text{同样} \quad \frac{S_f}{S_0} = 1 + C_2 u \quad (6-149)$$

其中  $C_1$  和  $C_2$  为常数。由 (6-145) 式 ~ (6-149) 式可求得管内压力  $p$  和火焰传播速度  $\dot{R}_f$ 。

图 6-30 为火焰传播速度变化曲线, 实线为计算值, 离散点为实验值。盖板不漏气时, 火焰急剧加速。漏气时, 即使漏气度为 8%, 火焰也不具有明显的加速趋势。

## 二、数值模拟

若将反应物和燃烧产物视作两种组元, 燃烧为反应物转换为燃烧产物的单组元反应。记反应物的质量分数为  $Y$ , 燃烧过程中其值从 1 变到 0。具有一定宽度的湍流燃烧区将  $Y=1$  的未燃区和  $Y=0$  的已燃区分开。反应区内靠近  $Y=1$  的一端, 相干流块以未燃反应物为母体混有部分燃烧产物。然后逐渐过渡, 在靠近  $Y=0$  的一端, 相干流块以燃烧产物为母体混有部分反应物。反应区内湍流混合是燃烧的决定步骤, 其值与当地流场特点有关。根据 Bray 公式<sup>[37]</sup>

$$W = C \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{K} (1 - \bar{Y}) \bar{Y} \quad (6-147)$$

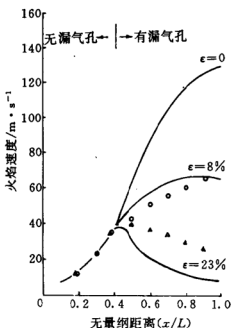


图 6-30 火焰传播速度变化曲线

其中  $W$  为湍流反应速率,  $C$  为常数。

湍流燃烧系统的守恒方程为

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \quad (6-148)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \sigma_{ij}) \quad (6-149)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{Y}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{Y}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu}{S_i} + \frac{\mu_i}{\sigma_Y} \right) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x_j} \right] - W \quad (6-150)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{h}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{h}) &= \frac{D \bar{p}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_i}{\sigma_h} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right] \\ &+ \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} \bar{e} + \frac{\mu_i}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + WQ \end{aligned} \quad (6-151)$$

$$\bar{\rho} \frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_i}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\mu_i}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \epsilon \quad (6-152)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\epsilon}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_i}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - C_1 \frac{\epsilon}{K} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\mu_i}{\rho^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) \\ & - C_2 \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (6-153)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -\mu_i \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \bar{\rho} K + \mu_i \frac{\partial \bar{u}_K}{\partial x_K} \right) \\ \mu_i = & C_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}_K}{\partial x_K} \delta_{ij}$$

上述诸式可写成通式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} \right) + S_* \quad (6-154)$$

该式左端第一项称为瞬时项,第二项称为对流项。右端第一项称为扩散项,第二项称为源项。

Hjertager 等<sup>[38]</sup>利用上述方程讨论重复设置的障碍物导致的湍流火焰加速,取  $C_\mu=0.09$ ,  $C_1=1.44$ ,  $C_2=1.79$ ,  $\sigma_\epsilon=0.7$ ,  $\sigma_i=0.7$ ,  $\sigma_\epsilon=1.3$ ,  $\sigma_K=1.0$ , 采用 SIMPLE 格式<sup>[39]</sup>, 图 6-31 和图 6-32 为其计算结果,其中图 6-31 为等温线,反映了管内温度分布及火焰加速;图 6-32 为管两端的压力变化曲线,其中曲线 1 为点火端,曲线 2 为开口端。

FLACS 程序<sup>[39]</sup>和 REAGAS 程序<sup>[40]</sup>都是基于上述守恒方程的,它们常用来模拟湍流加速火焰所导致的爆炸现象。例如用 REAGAS 程序模拟泄漏天然气中心点火后火焰在贮罐下水泥桩之间传播时,因加速导致爆炸的现象。计算得到的流场等温线如图 6-33 所示,几个确定位置的压力变化曲线如图 6-34 所示。

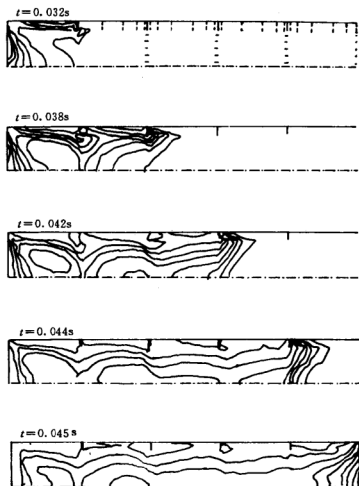


图 6-31 障碍物加速湍流燃烧的流场等温线

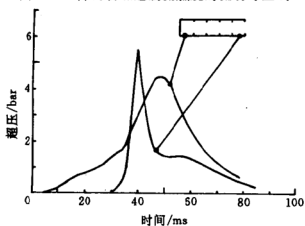


图 6-32 流场开口与闭口端的压力变化

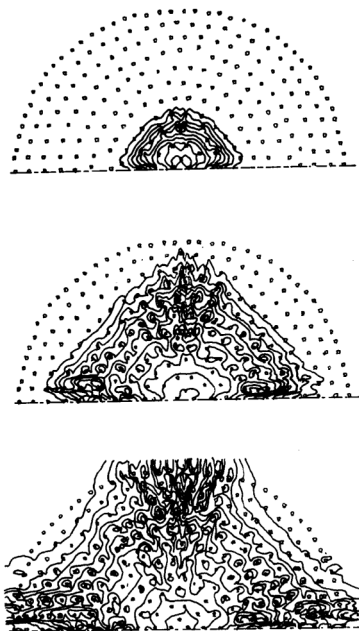


图 6-33 REAGAS 模拟的湍流加速火焰的爆炸场等温线

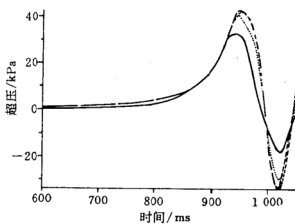


图 6-34 REAGAS 模拟的几点压力变化曲线

## 第七章 两相爆轰

当激波在凝聚态燃料(包括固态粉尘和液滴)和气相氧化剂组成的悬浮流中传播时,波后高温气流加热燃料颗粒,经一段诱导期后使之点火燃烧。如果燃烧释放的热足以支持激波稳定传播,这种自持的带化学反应的两相激波称为两相爆轰波。

大量实验表明,无论是气相还是两相爆轰,其波阵面皆不平整,具有三维网状胞格结构。爆轰波是以大量横波相互碰撞形成新横波的方式传播的,阵面强度是周期脉动的。与三维结构有关的参数如胞格尺寸、临界起爆能等等皆称为动力学爆轰参数。迄今为止,尚无适当的模型从理论上确定这些参数。通常使用的爆轰波模型为一维 ZND 模型,该模型设爆轰波由引导激波和反应区构成,止于 C-J 平面。由此确定的爆轰波结构和波后状态如爆压、爆温等实际上是一维截面上的平均值,这些结果与实验符合得很好。即使基于 ZND 模型,两相爆轰仍然是一个复杂问题,因为它需要考虑激波后两相间的相互作用,液滴的破碎雾化,颗粒的非均相燃烧等一系列物理化学过程,涉及范围颇广。

本章内容包括:两相爆轰波的一般特性,讨论化学反应和两相流动对爆轰波结构的影响;气云爆轰,讨论激波作用下液滴界面失稳导致的变形、雾化以及点火爆炸,讨论爆轰波的弛豫结构;粉尘爆轰,讨论激波作用下粉尘颗粒的点火与燃烧,爆轰波的弛豫结构以及特殊情况下的双阵面结构。



## 7.1 两相爆轰波一般特性

### 7.1.1 颗粒悬浮流中的正激波

#### 一、平衡声速和冻结声速<sup>[1]</sup>

当颗粒温度和速度随气相状态同步变化时,即流动过程中保持  $u_g = u_p$  和  $T_g = T_p$ ,称为平衡流动。如果气相状态发生变化但颗粒保持原状态不变,称为冻结流动。平衡流动和冻结流动是两相流动的两种极端情形。

根据声速定义

$$a_e^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_m} \right)_{e,e} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right)_{e,e} \left( \frac{d\bar{\rho}_t}{d\rho_m} \right)_{e,e} \quad (7-1)$$

脚标  $e$  表示平衡流动。由混合物等熵方程

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right)_{e,e} = \frac{\Gamma_g p}{\rho_g} \quad (7-2)$$

由(3-39)式和(3-40)式可得

$$\left( \frac{d\bar{\rho}_t}{d\rho_m} \right)_{e,e} = \frac{1 - Y_p}{(1 - \varepsilon_p)^2} \quad (7-3)$$

将上述两式代入(7-1)式得

$$\left( \frac{a_e}{a} \right)^2 = \frac{1 + \eta\delta}{(1 + \eta)(1 + \eta\delta)(1 - \varepsilon_p)^2}$$

其中  $a^2 = \frac{\gamma R}{w} T_g$  为纯气体声速。忽略颗粒体积时

$$a_e^2 = a^2(1 - Y_p) \frac{1 + \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}}{1 - \gamma \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}} = \frac{\Gamma_g p}{\rho_m} \quad (7-4)$$

由于  $1 - Y_p < 1$ ,  $\frac{1 + \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}}{1 + \gamma \frac{\delta Y_p}{1 - Y_p}} < 1$ , 故  $a_e < a$ , 即平衡流中颗粒的存在导

致声速的下降。

处于平衡态的两相流动经等熵扰动后,设仅气体状态发生变化,而颗粒状态保持不变,扰动波的传播速度便是冻结声速。将坐标建立在扰动波阵面上,有

$$\text{质量守恒方程} \quad \bar{\rho}_g \Delta u_g + u_g \Delta \bar{\rho}_g = 0$$

$$\text{动量守恒方程} \quad 2(1-\varepsilon_g) \bar{\rho}_g u_g \Delta u_g + (1-\varepsilon_g) u_g^2 \Delta \bar{\rho}_g + \Delta p = 0$$

$$\text{能量守恒方程} \quad u_g \Delta u_g + c_g \Delta T_g + \frac{\eta}{\rho_g} \Delta p = 0$$

$$\text{状态方程} \quad \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_g} - \frac{\Delta T_g}{T_g} = 0$$

其中符号  $\Delta$  表示扰动导致的气相参数变化。上述方程仅当系数行列式为零时才有非零解,故

$$u_g^2 = \frac{a^2}{1-\varepsilon_g}$$

由于坐标建立在扰动波阵面上,故  $u_g = a_f$ , 于是

$$\left( \frac{a_f}{a} \right)^2 = \frac{1}{1-\varepsilon_g} \quad (7-5)$$

由于  $\frac{1}{1-\varepsilon_g} > 1$ , 故  $a_f > a$ , 即冻结声速大于纯气体中的声速。忽略颗粒体积时,  $a_f = a$ 。

如果波后颗粒速度不变, 温度随气相同步变化, 即速度冻结, 温度平衡, 可得

$$a_{e,f}^2 = a_e^2 \frac{\rho_m}{\rho_g} \frac{1}{1-\varepsilon_g} \quad (7-6)$$

$$\text{忽略颗粒体积} \quad a_{e,f}^2 = a_e^2 \frac{\rho_m}{\rho_g} = a_f^2 \frac{\Gamma_e}{\gamma}$$

根据(3-49)式,  $\frac{\Gamma_e}{\gamma} < 1$ , 故  $a_{e,f} > a_f$ 。由于  $\frac{\rho_m}{\rho_g} > 1$ , 故  $a_{e,f} > a_e$ , 因此  $a_e < a_{e,f} < a_f$ 。

同样对于颗粒温度冻结、速度平衡, 有

$$a_{f,e}^2 = a_f^2 \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_m} = a_e^2 \frac{\gamma}{\Gamma_e} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon_g} \quad (7-7)$$

忽略颗粒体积  $a_{f,e}^2 = a_f^2 \frac{\rho_f}{\rho_n} = a_e^2 \frac{\gamma}{\gamma_e}$ , 有  $a_e < a_{e,f} < a_f$ 。因此  $a_e < a_{e,f} \neq a_{f,e} < a_f$ 。

## 二、颗粒悬浮流中的正激波<sup>[7]</sup>

讨论激波在颗粒悬浮流中的传播时, 假设

(1) 气体为完全气体;

(2) 球形颗粒大小一致、温度均匀且不可压缩, 比热为常数。忽略颗粒体积、颗粒运动对压力的贡献以及颗粒间的相互作用;

(3) 两相间仅有动量和能量传递;

(4) 激波稳定传播。

对于平面一维问题, 在激波坐标中

$$\rho_g u_g = \rho_{g0} u_{g0} = G_g \quad (7-8)$$

$$\rho_p u_p = \rho_{p0} u_{p0} = \eta G_g \quad (7-9)$$

$$G_g u_g + \eta G_g u_p + p = G_g (1 + \eta) u_{g0} + p_0 \quad (7-10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_g^2}{2} + c_g T_g + \eta \left( \frac{u_p^2}{2} + \delta c_p T_p \right) \\ &= \frac{u_{g0}^2}{2} (1 + \eta) + c_g (1 + \eta \delta) T_{p0} \end{aligned} \quad (7-11)$$

$$p = \frac{R}{W_g} \rho_g T_g \quad (7-12)$$

其中脚标 0 表示波前, 无脚标表示波后任一截面, 脚标  $g$  和  $p$  分别表示气相和颗粒相,  $\eta$  为两相载荷比,  $\delta$  为两相比热比。

颗粒方程为

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{u_g - u_p}{\tau_s} f(R_{\tau}) \quad (7-13)$$

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{T_g - T_p}{\tau_T} \frac{N_s}{2} \quad (7-14)$$

激波扫过颗粒所需时间  $\tau_f = \frac{d_0}{u_{g0}}$ , 两相动量弛豫时间  $\tau_s = \frac{\bar{\rho}_p d_0^2}{18\mu}$ , 其中

$d_0$  为颗粒直径, 故  $\frac{\tau_f}{\tau_s} = \frac{18\mu}{\rho_p d_0}$ 。计算表明即使  $d_0 < 0.1 \mu\text{m}$ , 也有  $\frac{\tau_f}{\tau_s} =$

$10^{-3}$ , 即激波扫过颗粒的时间远小于两相间的动量弛豫时间, 因此

激波波后仅气体被压缩,颗粒运动状态保持不变。故引导激波两侧的守恒方程为

$$\rho_g u_g = \text{常数}$$

$$\rho_g u_g^2 + p = \text{常数}$$

$$\frac{u_g^2}{2} + c_g T_g = \text{常数}$$

进而有

$$\frac{u_{g1}}{u_{g0}} = \frac{\rho_{g0}}{\rho_{g1}} = \frac{1}{(\gamma + 1)M_s^2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2 \right) \quad (7-15)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_s^2 - 1) \quad (7-16)$$

$$\frac{T_{g1}}{T_{g0}} = 1 + \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{1 + \gamma M_s^2}{M_s^2} (M_s^2 - 1) \quad (7-17)$$

其中脚标 1 表示引导激波波后,  $M_s$  为激波马赫数。

激波作用后,气体被压缩状态发生突跃,但颗粒状态保持不变,于是两相间的平衡被打破,引导激波后为两相弛豫区,该区的参数分布可由方程(7-8)~方程(7-14)求得。

激波阵面上,即  $x=0$  处,  $u_g > u_s$ ,  $T_g > T_s$ , 根据(7-13)式和(7-14)式,弛豫区内颗粒速度单调下降,温度单调上升。当方程(7-8)、方程(7-10)、方程(7-11)和方程(7-12)写成微分形式时可推得

$$\frac{du_g}{du_s} = \frac{\eta \left( \gamma u_s - (\gamma - 1)u_s + (\gamma - 1)\delta c_s \frac{dT_s}{du_s} \right)}{\frac{c_s(\gamma - 1)T_s}{u_s} - u_s} \quad (7-18)$$

根据完全气体状态方程

$$(\gamma - 1)\delta c_s \frac{dT_s}{du_s} = \frac{\delta a_0^2}{\tau_{g0}} \frac{dT_s}{du_s}$$

$$\frac{c_s(\gamma - 1)T_s}{u_s} = -\gamma u_s - \gamma \eta u_s + \gamma(1 + \eta)u_{s0} + \frac{a_0^2}{u_s}$$

代入(7-18)式得

$$\frac{du_g}{du_g} = \frac{\eta \left( \gamma \frac{u_g}{a_0} - (\gamma - 1) \frac{u_g}{a_0} + \delta \frac{dT_g}{du_g} \frac{a_0}{T_{g0}} \right)}{\gamma \left( \frac{u_{g0}}{a_0} - \frac{u_g}{a_0} \right) + \gamma \eta \left( \frac{u_{g0}}{a_0} - \frac{u_g}{a_0} \right) + \frac{a_0}{u_{g0}} - \frac{u_g}{a}} \quad (7-19)$$

由(7-13)式和(7-14)式得

$$\frac{dT_g}{du_g} = \frac{\kappa}{\delta} \frac{T_g - T_g}{u_g - u_g}$$

其中  $\kappa = \frac{8N_s}{P_r C_p R_{eq}}$ 。代入(7-19)式,当  $x=0$  时

$$\left( \frac{du_g}{du_g} \right)_{x=0} = \frac{\eta \left( \gamma \frac{u_{g1}}{a_0} - (\gamma - 1) \frac{u_{g0}}{a_0} + \kappa \left( \frac{T_{g1}}{T_{g0}} - 1 \right) \right) \left( \frac{u_{g1}}{a_0} - M_s \right)}{8 \left( M_s - \frac{u_{g1}}{a_0} \right) + \left( \frac{1}{M_s} - \frac{u_{g1}}{a_0} \right)}$$

将(7-15)式~(7-17)式代入上式得

$$\left( \frac{du_g}{du_g} \right)_{x=0} = \frac{\eta(2\gamma - (\gamma - 1)M_s^2 + \kappa(\gamma - 1)(1 + \gamma M_s^2))}{(\gamma + 1)(M_s^2 - 1)}$$

由于  $\frac{du_g}{dx} = \frac{du_g}{du_g} \frac{du_g}{dx}$ , 且  $\frac{du_g}{dx} < 0$ , 故

$$Sgn \left( \frac{du_g}{dx} \right)_{x=0} = - Sgn(2\gamma - (\gamma - 1)\kappa(1 + \gamma M_s^2))$$

该式表明,当激波强度  $M_s^2 < \frac{2\gamma}{\gamma-1}$  时,尽管引导激波后颗粒速度大于气相质点速度,气相速度仍呈下降趋势。非常强的激波仅在  $\gamma\kappa < 1$  和  $M_s^2 > \frac{2\gamma + (\gamma-1)\kappa}{(\gamma-1)(1-\gamma\kappa)}$  时才可能使气相速度上升。即使如此,这种趋势也是暂时的。根据(7-10)式,当  $du_g < 0, du_g < 0$  时  $dp > 0$ , 故弛豫区内的压力是递增的。

以空气和玻璃球两相混合物为例<sup>[1]</sup>,  $M_s = 1.2, \delta = 1.125, \eta = 0.2, d_0 = 10\mu\text{m}, N_s = 2, C_p = \frac{27}{R_{eq}^{0.81}}$ , 计算结果如图 7-1 所示,各参数的变化趋势与理论分析一致。

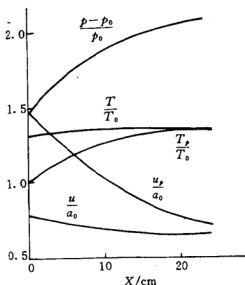


图 7-1 两相介质的激波弛豫结构

### 7.1.2 两相爆轰波<sup>[2,3]</sup>

两相爆轰较均相复杂得多,迄今还无法进行多维结构的理论研究和数值模拟,即使是实验研究,与气相比也显得相当粗糙。因此,关于两相爆轰的讨论仍基于一维 ZND 模型。基本假设与前节相同,但考虑燃料燃烧导致的两相质量传递。在激波坐标中有守恒方程

$$\rho_g u_g + \rho_p u_p = (\rho_{g0} + \rho_{p0}) u_{g0} \quad (7-20)$$

$$\rho_g u_g^2 + \rho_p u_p^2 + p = (\rho_{g0} + \rho_{p0}) u_{g0}^2 + p_0 \quad (7-21)$$

$$\begin{aligned} & \rho_g u_g \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho_g} + \frac{u_g^2}{2} \right) + \rho_p u_p \left( \delta c_p T_p + \frac{u_p^2}{2} + Q_s \right) \\ &= \rho_{g0} u_{g0} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_{g0}} + \frac{u_{g0}^2}{2} \right) + \rho_{p0} u_{p0} \left( \delta c_p T_{p0} + \frac{u_{p0}^2}{2} + Q_s \right) \end{aligned} \quad (7-22)$$

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{u_g - u_r}{\tau_a} \quad (7-23)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{T_g - T_r}{\tau_r} \quad (7-24)$$

为仿照气相爆轰,引进下述变量

$$P = p + \frac{(u_g - u_r)^2 \rho_g \rho_r}{\rho_g + \rho_r}$$

$$V = \frac{1}{\rho_g + \rho_r}$$

$$U = \frac{\rho_g u_g + \rho_r u_r}{\rho_g + \rho_r}$$

于是(7-20)式和(7-21)式分别写成

$$\frac{U}{V} = \frac{U_0}{V_0} = G$$

$$\frac{U^2}{V} + P = \frac{U_0^2}{V_0} + P_0$$

进而有 Rayleigh 方程

$$\frac{P - P_0}{V - V_0} = -G^2 \quad (7-25)$$

两相爆轰波的弛豫区内存在着质量、动量和能量的运输。如前所述,用  $\tau_a$  来描述动量弛豫,  $\tau_r$  来描述能量弛豫,  $\tau_c$  来描述反应弛豫。令  $\alpha = \frac{\tau_r}{\tau_c}$  和  $\beta = \frac{\tau_a}{\tau_c}$ , 当  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  时,  $u_g = u_r, T_g = T_r$ , 即两相始终处于平衡状态, 故  $P = p, \frac{1}{V} = \rho_m, U = u_g$  在  $P-V$  平面对应于  $H_m$  曲线, 该线与 Rayleigh 线切于  $J_m$ , 如图 7-2 所示<sup>[2]</sup>, 该点有

$$a_m = (\gamma_r p v_m)^{\frac{1}{2}} \quad \text{即} \quad U = (\gamma_r P V)^{\frac{1}{2}}$$

忽略波前压力时, 气相爆轰有关式  $\frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma}$ , 两相爆轰中引进绝热指数  $\Gamma$ , 满足  $\frac{V_i}{V_0} = \frac{\Gamma}{\Gamma+1}$ 。当  $\beta \rightarrow \infty$  时, 意味着颗粒动量被冻结, 有  $u_r = u_{g0}, \rho_r = \rho_{g0}$ , 故





当  $\alpha$  变化至图中  $A$  点时, 颗粒动量仍被冻结, 但能量处于平衡状态, 令该点的值为  $\alpha^*$ 。其后颗粒始终保持动量被冻结而能量与气相平衡的状态, 故其状态沿  $H_{ef}$  变化。至  $J_{ef}$  点时, 记该点的值为  $\alpha^{**}$ , Rayleigh 线与  $H_{ef}$  线相切, 切点有

$$a_{ef} = \left( \gamma_e \frac{p}{\rho_e} \right)^{\frac{1}{2}} = U_0$$

$$V_{ef} = V_0 \frac{\Gamma_{ef}}{\Gamma_{ef} + 1} \quad (7-29)$$

同样还可以讨论  $\alpha \rightarrow \infty$  或  $\alpha \rightarrow 0$  的前提下, 波后状态的变化情形。

方程(7-20)~方程(7-22)还可写成

$$\rho_e u_e + \rho_e u_e = (1 + \eta_0) G_e \quad (7-30)$$

$$G_e (1 + \eta_0) (1 - \phi) u_e + G_e (1 + \eta_0) \phi u_e + p$$

$$= G_e (1 + \eta_0) u_{e0} + p_0 \quad (7-31)$$

$$(1 + \eta_0) (1 - \phi) \left( \frac{u_e^2}{2} + c_e T_e \right) + \phi (1 + \eta_0)$$

$$\times \left( \frac{u_e^2}{2} + \delta_e T_e \right) + (1 + \eta_0) \phi Q_e$$

$$= (1 + \eta_0) \frac{u_{e0}^2}{2} + (1 + \eta_0 \delta) c_e T_{e0} + \eta_0 Q_e \quad (7-32)$$

其中  $G_e = \rho_{e0} u_{e0}$ ,  $\eta_0 = \frac{\rho_{e0}}{\rho_0}$ ,  $\phi = \frac{\rho_e u_e}{G_e (1 + \eta_0)}$ 。当  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  时, 即  $u_e = u_*$ ,  $T_e = T_*$  时, 有

$$\rho_e u_e = G_e (1 + \eta_0)$$

$$G_e (1 + \eta_0) u_e + p = \text{常数}$$

$$\frac{u_e^2}{2} + c_e T_e + \phi Q_e = \text{常数}$$

写成微分形式

$$\frac{d\rho_e}{dx} = - \frac{\rho_e \Sigma}{1 - M_e^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{u_e^2 \rho_e \Sigma}{1 - M_e^2}$$

$$\frac{du_f}{dx} = \frac{u_f \Sigma}{1 - M_f^2}$$

其中  $M_f = \frac{u_f}{a_f}$ ,  $\Sigma = \frac{(\gamma-1)Q\phi_0}{dx} \frac{d\xi}{dx}$ ,  $\xi = 1 - \frac{\phi}{\phi_0}$ , 因为激波后  $1 - M_f^2 > 0$ ,  $\Sigma > 0$ , 故有  $\frac{d\rho_f}{dx} < 0$ ,  $\frac{dp}{dx} < 0$  和  $\frac{du_f}{dx} > 0$ 。即化学反应效应使弛豫区内压力和密度下降, 速度上升。如果两相间无质量传递, 即  $\phi = 0$ , 有

$$\rho_g u_g = G,$$

$$G_g(u_g + \eta_0 u_g) + p = (1 + \eta_0)G_g u_{g0} + p_0$$

$$\frac{1}{2}u_g^2 + c_g T_g + \eta_0 \left( \frac{u_g^2}{2} + \delta c_g T_g \right) = \frac{1}{2}u_{g0}^2 (1 + \eta_0) + c_g (1 + \eta_0 \delta) T_{g0}$$

此式即惰性颗粒悬浮流中的激波守恒方程(7-8)~方程(7-11), 根据前节讨论,  $\frac{d\rho_g}{dx} > 0$ ,  $\frac{dp}{dx} > 0$ ,  $\frac{d\rho_f}{dx} > 0$  和  $\frac{du_f}{dx} < 0$ , 即两相间的动量和能量传递使弛豫区内压力和密度上升, 速度下降。

因此, 化学反应和两相效应对某些参量的影响正相反。两相爆轰波的弛豫区内由于这两种因素的同时存在和相互消长使其参数分布呈复杂形态。

## 7.2 气云爆轰

### 7.2.1 激波作用下液滴的变形和雾化

#### 一、液滴变形<sup>[4]</sup>

激波与液滴作用后, 气体状态发生突跃, 液滴状态不变, 两相间出现速度差, 这使得液滴因表面受力不均而发生变形。假设变形后液滴内部流场仍关于球心对称, 其法向动量守恒方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial r}$$

其中  $v$  为液体法向速度,  $r$  为球对称空间坐标。积分此式

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r(t)} v dr - \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{\Delta p}{\rho_l}$$

其中  $a$  为变形后椭球长半轴, 当  $r=a$  时  $v=v_s=\frac{da}{dt}$ 。假设  $v$  在液滴内的分布满足

$$v = \left( \frac{r}{a} \right)^k v_s$$

其中  $k$  为常数。代入上式

$$\frac{\delta + 1}{k + 1} \frac{d^2\delta}{dT^2} + \frac{1}{2} \frac{1 - k}{1 + k} \left( \frac{d\delta}{dT} \right)^2 = 2\mathcal{D} \quad (7-33)$$

其中  $\delta = \frac{a}{r_0} - 1$ ,  $T = \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{u_s}{r_0} t$ ,  $\mathcal{D} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_g u_s^2}$ ,  $r_0$  为液滴初始半径,  $u_s$  为气

体相对于液滴的流速。取  $\mathcal{D}=4$ , 其计算结果为图 7-3 中曲线  $c$ 。离散黑点为实验结果<sup>[6]</sup>, Ranger 用简单直线拟合实验结果如图中曲线 B. Krauss<sup>[6]</sup>根据实验得到的拟合公式为

$$\frac{a}{r_0} = 1 + 2.62T - 0.68T^2 - 0.97T^3$$

如图中曲线 A 所示。

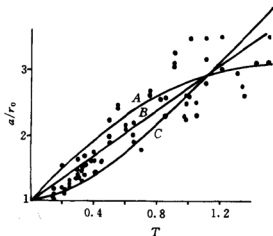


图 7-3 气流中的液滴变形

## 二、液滴破碎和雾化<sup>[7,8]</sup>

气流吹过液体表面时出现两类不稳定性:一类是界面法向加速,质量力导致的界面失稳,称为 Lamb-Taylor 不稳定;另一类是

界面切向速度差导致的界面失稳,称为 Kelvin-Helmholtz 不稳定。扰动导致界面弯曲,其压力分布发生变化,根据 Bernoulli 定律液面凸出部分的压力高于凹陷部分,这就导致变形加剧以致界面失稳。线性分析表明,扰动振幅随时间指数增长,则有

$$\eta = \eta_0 \exp^{I(k)t} \quad (7-34)$$

其中  $\eta$  为扰动振幅,  $\eta_0$  为初始振幅。

$$I(k) = \left( \frac{\bar{\rho}_g - \bar{\rho}_l}{\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l} k g + \frac{\bar{\rho}_g \bar{\rho}_l (u_g - u_l)^2}{(\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l)^2} k^2 - \frac{\sigma k^3}{\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  为波数,  $\lambda$  为波长,  $\sigma$  为液滴表面张力系数,  $g$  为液滴加速度。

根号中第一项对应于表面加速效应,即 Lamb-Taylor 不稳定性,第二项对应于剪切效应,即 Kelvin-Helmholtz 不稳定性,第三项为表面张力,该效应起稳定作用。仅当  $I(k) > 0$  时,界面才会失稳,即当

$k < \sqrt{\frac{\sigma}{(\bar{\rho}_g - \bar{\rho}_l)g}}$  和  $k < \frac{\bar{\rho}_g \bar{\rho}_l (u_g - u_l)^2}{\sigma(\bar{\rho}_g + \bar{\rho}_l)}$  时界面失稳。为描述这两个临界

值,引入无量纲量  $B_0 = \frac{d^2 \bar{\rho}_g g}{\sigma}$  和  $W_e = \frac{d \bar{\rho}_g (u_g - u_l)^2}{\sigma}$  分别称为 Bond 数和 Weber 数。

液滴在气流作用下发生变形,由于表面各点受力不同,其内部表面附近出现由滞止点向周边的运动,不稳定波也开始增长。但表面张力力图使之恢复原状,因此液滴出现振动,最后导致破碎,如图 7-4 中情形 1,称为振动破碎。当  $We$  数约为 30~60 时,液滴内部产生与气流同向的流动,使之变形为袋状,从而产生破碎,称之为袋状破碎。此类破碎还可以分为几种:液滴表面的 Kelvin-Helmholtz 不稳定会使袋底雾化成大量直径小于 10 $\mu$ m 的液雾,袋口作为液滴母体残留,如图 7-4 中情形 2,称为袋状剥离;当  $We$  数和  $Bo$  数较高时,袋口的 Lamb-Taylor 不稳定使流体汇聚形成射流和杵体,如图 7-4 中情形 3,称为带杵体的袋状剥离;当不稳定短波增长时,液滴会出现若干袋底和杵体,如图 7-4 中情形 4,这导致无规则袋状剥离。进一步提高  $We$  数,液滴周边处直接出现剥离雾化,如图 7-4 中情形 5,称为剥离雾化。当  $Bo$  数很大时, Lamb-Taylor

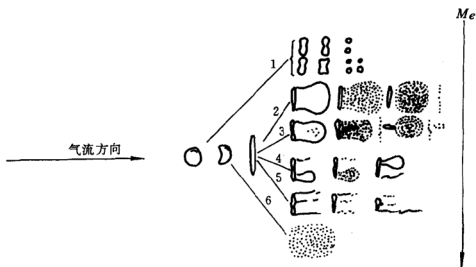


图 7-4 气流中液滴的破碎与雾化

ion 不稳定的迅速发展,整个液滴于瞬间破碎雾化,如图 7-4 中情形 6,称为爆炸雾化。以上这些破碎模型皆为实验所证实。

### 三、破碎模型<sup>[9,4]</sup>

Gordon<sup>[9]</sup>用一简单模型处理液滴破碎问题。他在液滴内取一与气流同向而贯穿液滴的圆柱体,并考虑背风面可能出现的负压,圆柱迎风底面的平均压力取为  $\frac{1}{2}\bar{\rho}_l(u_s - u_t)^2$ ,即为滞止压力。该压力使圆柱具有运动趋势。表面张力阻碍液滴变形,从而产生阻碍圆柱运动的力,每个端面的值为  $2\pi r\sigma$ ,故由此产生的总阻力为  $4\pi r\sigma$ ,  $r$  为圆柱半径。设  $r = \frac{d}{2}$ ,  $d$  为液滴直径,于是单位底面积的阻力为  $8\sigma/d$ 。液体的粘性也阻碍圆柱运动,圆柱所受粘性阻力为  $\frac{16L\mu_l v}{d^2}$ ,  $L$  为圆柱的高,  $v$  为圆柱相对于液滴的运动速度,当  $L = d$  时,相应于单位底面积所受的粘性阻力为  $16\mu_l v/d$ 。因此,圆柱的运动方程为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho_l d} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho}_l u^2 - \frac{8\sigma}{d} - \frac{16\mu_l v}{d} \right)$$

其中  $u = u_s - u_t$ 。由该式可确定圆柱的瞬时速度和瞬时位移。当位移

为  $d$  时,液滴破碎,对应的时间为液滴破碎时间,记作  $t_b$ ,有方程

$$\frac{2(16\mu_i)^2}{\bar{\rho}_l d^2 \left( \bar{\rho}_g u^2 - 16 \frac{\sigma}{d} \right)} = \frac{16\mu_i t_b}{\bar{\rho}_l d} - 1 + \exp \left( \frac{16\mu_i t_b}{\bar{\rho}_l d^2} \right)$$

写成无量纲形式

$$\frac{2\bar{\mu}_i^2}{\bar{D}(\bar{D}-1)} = \frac{2\bar{\mu}_i \bar{t}_b}{\bar{D}^2} - 1 + \exp \left( \frac{2\bar{\mu}_i \bar{t}_b}{\bar{D}^2} \right) \quad (7-35)$$

其中  $\bar{t}_b = \frac{t_b \bar{\rho}_g u^3}{32\sigma} \cdot \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_l} \right)^{\frac{1}{2}}, \bar{D} = \frac{d \bar{\rho}_g u^2}{16\sigma}, \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i u}{\sigma} \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_l} \right)^{\frac{1}{2}}$

计算曲线如图 7-5 所示。当液滴直径小于某临界值时,破碎时间趋于无穷。该临界值对应于  $\bar{D}=1$ ,由(7-35)式可知临界直径  $d_c = \frac{16\sigma}{\bar{\rho}_g u^2}$ 。小于该值时,液滴不再破裂。

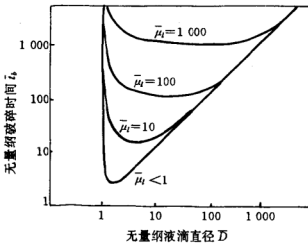


图 7-5 液滴直径与破碎时间的关系曲线

当液滴直径几倍于临界值时,忽略内部粘性,即  $\mu_i \ll du(\bar{\rho}_g \bar{\rho}_l)^{\frac{1}{2}}$  和  $\sigma \ll du^2 \bar{\rho}_g$ , 于是由(7-35)式得

$$t_b = \frac{2d}{u} \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_l} \right)^{\frac{1}{2}}$$

即液滴破碎时间正比于液滴直径,反比于气体流速。

当忽略表面张力考虑粘性时,即  $\mu_i \gg du(\bar{\rho}_g \bar{\rho}_l)^{\frac{1}{2}}$  和  $\sigma \ll du^2 \bar{\rho}_g$ , 于

是

$$t_b = \frac{32\mu_l}{\rho_g u^2}$$

即液滴破碎时间与液滴直径无关,仅与气体流速的平方成反比。

还可以基于 Taylor 不稳定性理论讨论液滴破碎问题<sup>[4]</sup>,此时 (7-34) 式写成

$$\eta = \eta_0 \exp \left[ \left( kg - \frac{k^3 \sigma}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]$$

计算表明,随扰动振幅的增加,波峰愈变愈陡,以致呈针状,而波谷似喇叭口愈变愈宽,最后在液滴中形成气泡。该气泡向液滴内部渗透,其速度先呈指数增加。当  $\eta = 0.2\lambda$  时,速度达到最大值  $u_{\max}$ ,以后气泡以此速度作匀速运动,有

$$u_{\max} = 0.338(g\lambda)^{\frac{1}{2}}$$

因此,气泡的穿透深度即扰动振幅,可写成

$$\eta(k, t) = 0.2\lambda + 0.338(g\lambda)^{\frac{1}{2}} \left[ t + \frac{\ln \left( \frac{\eta_0}{0.2\lambda} \right)}{\left( kg - \frac{k^3 \sigma}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

其中  $\eta_0$  为初始振幅,可取作边界层的特征厚度,

故

$$\eta_0 = \left( \frac{\nu_l d}{2u_g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

扁平液滴的平均厚度可用近似公式  $\frac{4}{3r_0(1+bT)^2}$ , 其中  $b$  为常数,  $u_g$

为气体相对于液流的流速,  $T = \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_l} \frac{u_g}{r_0} t$ 。气泡穿越液滴的时间,即液滴破碎时间由如下公式给出

$$\frac{d_0}{u_g} \left( \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_g} \right)^{\frac{1}{2}} T - \frac{\ln \left( \frac{0.2\lambda}{\eta_0} \right)}{\left( kg - \frac{k^3 \sigma}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}}} > 0 \text{ 时}$$

$$d_0 - \frac{3}{2} \left\{ 0.2\lambda + 0.338(g\lambda)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{d_0}{u_s} \right) \left( \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{2}} T - \frac{\ln \left( \frac{0.2\lambda}{\eta_0} \right)}{\left( kg - \frac{k^3 \sigma}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} (1 + bT)^2 = 0$$

$$\text{否则, } d_0 - \frac{3}{2} \eta_0 \exp \left\{ \left( kg - \frac{k^3 \sigma}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_0}{u_s} \left( \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{2}} T \right\} (1 + bT)^2 = 0$$

以激波与含水醋酸铅液滴相互作用为算例,取  $M_s = 3$ ,  $d_0 = 2.12\text{mm}$ ,  $\eta_0 = 1.37 \times 10^{-4}\text{cm}$ ,  $b = 1.6$ , 计算结果如图 7-6 所示。曲线 A 为无量纲破碎时间  $T_b$  随波数的变化曲线, 存在一个最小破碎时间  $T_{b\min}$ , 对应的波数记作  $k_{\min}$ 。曲线 B 为  $T = T_{b\min}$  时扰动振幅随波数的变化曲线。对应于  $k_{\min}$ , 振幅最大。图中箭头所指为波长取整数的点。

#### 四、剥离模型<sup>[10]</sup>

当  $We$  数较大时, 气体相对于液滴的流动使液滴迎面表面附近的气相和液相中同时形成粘性边界层, 液滴周边处将直接出现剥离雾化。记气体相对于液滴的流速为  $u_\infty$ , 如图 7-7 所示。 $x$  为沿液滴表面的曲线坐标, 原点  $o$  为液滴表面滞止点,  $y$  为与  $x$  正交的坐标轴,  $z$  为对称轴,  $r$  为液滴表面一点到  $z$  轴的距离。

将气液两相均视为不可压, 边界层内定常流动的守恒方程为

$$\begin{aligned} \text{气相} \quad & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u_s (u - u_s) dy + \frac{du}{dx} \int_0^\infty (u - u_s) dy \\ & + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \int_0^\infty u_s (u - u_s) dy = v_s \left( \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad (7-36)$$

这里速度均为相对速度,  $u$  表示边界层外气流速度,  $u_s$  为边界层内的速度。

$$\text{液相} \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u_l^2 dy + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \int_0^\infty u_l^2 dy = -v_l \left( \frac{\partial u_l}{\partial y} \right)_{y=0} - \frac{1}{\rho_l} \frac{dp}{dx} \delta_l \quad (7-37)$$



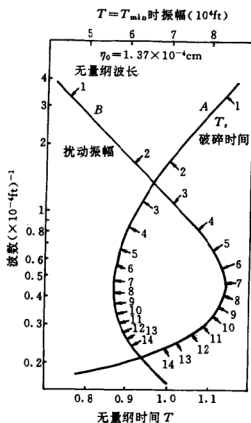


图 7-6 扰动振幅和破碎时间随波数的变化

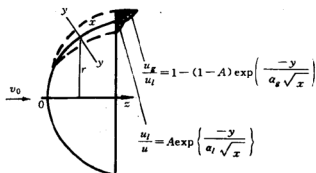


图 7-7 液滴剥离模型

其中液相压力梯度  $\frac{dp}{dx} = -\bar{\rho}_s u \frac{du}{dx}$ ,  $\delta_l$  为液相边界层厚度。该方程的边界条件为

$$-\bar{\rho}_l v_l \left( \frac{\partial u_l}{\partial y} \right)_{y=0} = \bar{\rho}_g v_g \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Taylor 假设边界层内的速度分布为

$$\frac{u_l}{u} = A \exp \left\{ -\frac{y}{\alpha_l x^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$\frac{u_g}{u} = 1 - (1 - A) \exp \left( -\frac{y}{\alpha_g x^{\frac{1}{2}}} \right)$$

由上述诸方程可解得  $x = \frac{\pi}{2} r_0$  处

$$\alpha_l = \left( \frac{8}{3} \frac{\gamma_l}{A u_\infty} \right) \quad (7-38)$$

$$A = \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_l} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{v_g}{v_l} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7-39)$$

视  $\frac{x}{r_0} = \frac{\pi}{2}$  的截面上,  $u_l \neq 0$  的质点皆被剥离, 于是周边界液滴剥离速率为

$$\frac{dm_l}{dt} = \pi d \bar{\rho}_l \int_0^\infty u_l dy = \frac{3}{4} (\pi d)^{\frac{3}{2}} \bar{\rho}_l A \alpha_l u_\infty$$

将(7-38)式和(7-39)式代入上式, 并记液滴运动速度为  $U_l$ , 气体运动速度为  $U_g$ , 有

$$\frac{dm_l}{dt} = \frac{3}{2} \pi^3 \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{v_g}{v_l} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \bar{\rho}_l v_l^{\frac{1}{2}} U_l^{\frac{1}{2}} d_0^{\frac{1}{2}} \right) \times \left( \frac{d}{d_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{U_l}{U_g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-40)$$

引入无量纲时间  $\bar{T} = \frac{U_g}{d_0} \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}} t$ , 在  $\bar{T}$  时刻液滴的质量为

$$\frac{m_l}{m_{l0}} = 3 \sqrt{6\pi} \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)^{\frac{1}{3}} Re^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\bar{T}} \left( \frac{d}{d_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{U_l}{U_g} \right)^{\frac{1}{2}} d\bar{T} \quad (7-41)$$

Engel<sup>[11]</sup>也推得类似的剥离公式

$$\frac{dm_l}{dt} = 4\pi \bar{\rho}_l \left( \frac{\bar{\rho}_g}{\rho_l} \right)^{0.33} \left( \frac{v_g}{v_l} \right)^{0.33} v_l^{0.55} (U_l - U_g)^{0.5} d^{1.5} \quad (7-42)$$

如果考虑气流作用下液滴的变形,设变形后液滴为椭球形,其长半轴为  $a$ ,则用  $2a$  代替(7-40)式或(7-42)式右端的  $d$  即可。

## 7.2.2 激波作用下液滴的点火与局部爆炸

### 一、点火延迟时间

激波作用下,液滴逐渐雾化,雾化燃料与氧化性气体形成可燃混合物,经一段点火延迟后点火,化学反应发生在气相。

根据 6.1.1 节,等容绝热反应体系

$$C_s = C_{s0} \frac{T_0 - T}{T_b - T_0}$$

其中  $C_s$  表示混合物中雾化燃料的浓度。其反应速率为

$$\frac{dC_s}{dt} = -A_0 \delta(t - t_{ig})$$

其中  $t_{ig}$  为点火延迟时间。如果以浓度变化为点火准则,可定义为  $\bar{C}_s$ 。

$= \frac{C_s}{C_{s0}} = 0.01$  时点火,于是

$$t_{ig} = \frac{1}{A_0} \int_{0.01}^1 \frac{d\bar{C}_s}{\bar{C}_s \exp \left[ - \frac{\frac{E_a}{RT_0}}{\bar{C}_s + \frac{Q_s C_{s0}}{C_r \rho_{s0} T_0} (1 - \bar{C}_s)} \right]} \quad (7-43)$$

考虑到激波后气相流场的非均匀性和两相间的速度差,液滴在运动过程中不断更换环境,故对(7-43)式需进行修正。把波后液滴运动时间分为若干间隔为  $\Delta t$  的时间段,设每一时间断内液滴所处环境相当于等容绝热系统,对应于第  $j$  个时间段,点火延迟时间为  $t'_{ig}$

$$t'_{ig} = \frac{1}{A_0} \int_{0.01}^1 \frac{dx}{x \exp \left[ - \frac{\frac{E_a}{RT_j}}{x + \frac{Q_s C_{sj}}{C_r \rho_j T_j} (1 - x)} \right]} \quad (7-44)$$

因此,  $\frac{\Delta t}{t'_{ig}}$  表示第  $j$  个时间段对点火延迟所作的贡献, 有

$$\sum_j \frac{\Delta t}{t'_{ig}} = 1$$

写成积分形式

$$\int_0^{t_{ig}} \frac{dt}{t'_{ig}} = 1 \quad (7-45)$$

称此方法为分步点火延迟法<sup>[12]</sup>。

点火问题是一个复杂问题, 建立点火模型时, 有很多点火准则可选用, 但很难判定哪一种最合适。具体选择时除考虑计算方便外还需与实验时所用的准则相容。

## 二、局部爆炸

图 7-8 所示的实验照片<sup>[13]</sup> 反映了氧气中直径为  $2600\mu\text{m}$  的癸烷液滴经激波作用后的变化过程。首先, 液滴开始变形, 前方出现弯曲激波。然后, 剥离和雾化的燃料在尾部形成可燃气云, 根据照片  $40\mu\text{s}$  时气云尚未点火。  $80\mu\text{s}$  时, 积聚的可燃气云突然点火后出现局部爆炸, 由此产生的爆炸波携带部分反应能量追赶引导激波, 并在碰撞后将能量传递给后者, 以补充其传播过程中的损失。这使得激波自持, 宏观上以稳定速度传播。

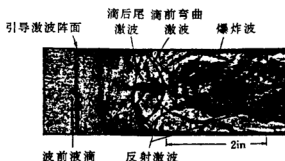


图 7-8 癸烷液滴与激波作用的纹影照片

为简单起见, 现讨论单个可燃液滴与激波的作用<sup>[14]</sup>。图 7-9 为引导激波和液滴局部爆炸产生的爆炸波的传播轨迹。激波作用后,  $t_1$  时刻液滴发生局部爆炸生成爆炸波, 该波于  $t_2$  时刻追上引导

激波。根据该图

$$t_{ig} + t_{bw} = (x_{ig} + x_{bw})/u_s$$

其中  $u_s$  为引导激波的传播速度。如果  $x_{bw} \gg x_{ig}$  则

$$t_{ig} = \frac{x_{bw}}{u_s} - t_{bw}$$

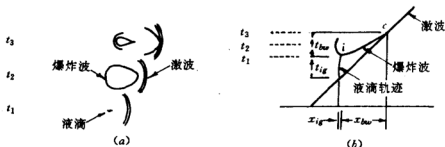


图 7-9 爆炸波与引导激波的相互作用

为使爆炸波前质点静止,将坐标建立在引导激波波后气体质点上,于是

$$t_{ig} = \frac{X_{bw}}{u_s} - t_{bw} \left( 1 - \frac{u_{g1}}{u_s} \right) \quad (7-46)$$

其中  $X$  为新坐标,脚标 1 表示引导激波波后。

设液滴的能量释放满足  $E = Wt^\beta$ , 其中  $W$  和  $\beta$  为常数,  $E$  液滴燃烧释放的能量。引进特征半径

$$R_0 = \left( \frac{E_0}{4\pi p_1} \right)^{\frac{1}{3}} = R_0(M_s)$$

和

$$R'_0 = R_0 \left( \frac{t_1 a_1}{R_0} \right)^{-\frac{\beta}{3-\beta}} = R'_0(M_s)$$

其中  $M_s = \frac{u_s}{a_0}$ ,  $t_1$  为液滴完全燃烧所需时间,有  $t_1 = \left( \frac{E_0}{W} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ ,  $E_0 = \frac{\pi d^3}{6} \times \bar{\rho} Q_s$  为单个液滴燃烧释放的总能量。于是(7-46)式写成

$$\begin{aligned} \frac{t_{ig}}{t_b} = & \left\{ Z_{bw} \left( \frac{T_{g1}}{T_{g0}} \right)^{\frac{1}{2}} / M_s - \left( \frac{\bar{\rho}_{g0}}{\bar{\rho}_{g1}} \right) \omega_{bw} \right\} \\ & \times \left( \frac{R_0}{t_2 a_1} \right)^{\frac{3}{3-\beta}} \left( \frac{t_1}{t_b} \right)^{-\frac{\beta}{3-\beta}} \end{aligned} \quad (7-47)$$

其中  $t_b$  为液滴完全破碎所需时间。实验表明,  $\frac{t_b u_{g1}}{d} \sqrt{\frac{\rho_{g1}}{\rho_l}} = \text{常数}$ ,  $Z_{bw} = \frac{X_{bw}}{R_0'}$  为无量纲追赶距离,  $\omega_{bw} = t_{bw} a_1 / R_0'$  为无量纲追赶时间。

根据  $E_0$  定义,  $R_0$  还可写成

$$R_0 = d \bar{Q} \left( \frac{\bar{\rho}_l}{\rho_{g0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

其中  $\bar{Q} = \left( \frac{Q_s}{24RT_{g0}} \right)^{\frac{1}{3}}$ , 因此

$$\frac{R_0}{a_1 t_b} = \psi \bar{Q} \left( \frac{\bar{\rho}_{g0}}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{6}} / T_s$$

其中  $\psi = M_s \left( 1 - \frac{\bar{\rho}_{g0}}{\rho_{g1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{g0}}{T_{g1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{3}}$ , 将其代入(7-47)式可得

$$F(t_{g1}, Z_{bw}, \omega_{bw}, M_s) = 0 \quad (7-48)$$

当  $\beta=0$  时, 液滴能量于爆炸瞬间全部释放, 若将此视作点源强爆炸<sup>[15]</sup>, 有

$$X_{bw} = \left( \frac{E_0}{\alpha \rho_l} \right)^{\frac{1}{5}} t_{bw}^{\frac{2}{5}}$$

其中  $\alpha$  是常数, 可根据自模拟方法求得。爆炸波的传播速度为

$$U_{bw} = \frac{2}{5} \frac{X_{bw}}{t_{bw}} \quad (7-49)$$

当  $\beta \neq 0$  时, 称为变能量爆炸波, 常用摄动法求解<sup>[16]</sup>, 得到  $U_{bw}$ ,  $X_{bw}$  和  $t_{bw}$  之间的关系, 将这种关系式代入(7-48)式有

$$\frac{t_{g1}}{t_b} = f(M_{bw}, M_s) \quad (7-50)$$

该方程为以  $\bar{Q}$  和  $\beta$  为参数的  $\frac{t_{g1}}{t_b}$  与  $M_{bw}$ ,  $M_s$  之间的函数关系式。取  $\gamma = 1.4$ ,  $\bar{Q} = 2.5$ , 计算结果如图 7-10 所示。

如果考虑激波与液滴悬浮流的相互作用<sup>[16]</sup>, 假设液滴按排整齐排列, 形成一张张液滴平面, 如图 7-11 所示。每排液滴经点火延迟后爆炸, 各液滴产生的爆炸波很快归并为反向传播的两道平面

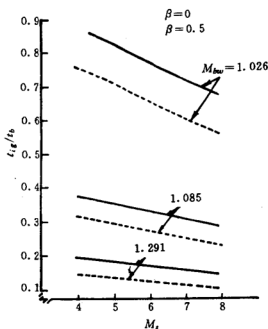


图 7-10 爆炸波与引导激波相碰时,  $M_{bw}$  与  $M_s$  随  $\frac{t_{ig}}{t_{ib}}$  的变化曲线

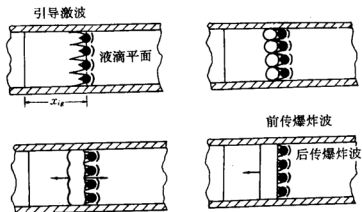


图 7-11 引导激波后液滴爆炸产生的爆炸波

激波, 其中一个将追赶引导激波。

设点火后液滴的能量匀速释放, 激波坐标中波后气体的守恒方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (7-51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7-52)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(\gamma - 1)Q}{\rho} - u \frac{\partial p}{\partial x} - (\gamma - 1)p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7-53)$$

忽略液滴爆炸波的归并过程, 即点火瞬间便产生平面爆炸波, 若以其守恒方程为初始条件, 采用 Mac Cormack 格式, 可求得方程组 (7-51)~(7-53) 的数值解, 结果如图 7-12。其中  $x = -1$  为引导激波阵面,  $x = 0$  为点火面, 即爆炸面。

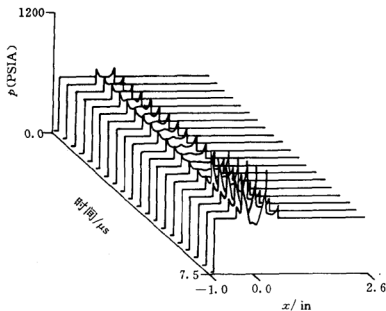
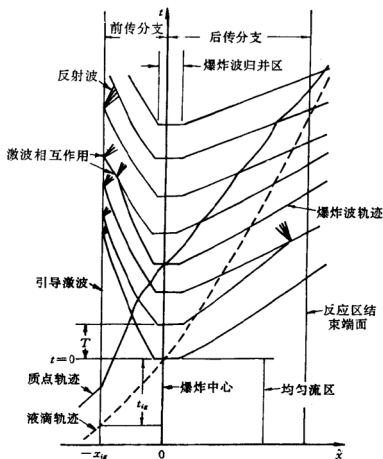


图 7-12 激波后局部爆炸导致的压力分布

第一排液滴爆炸时, 一对反向传播的爆炸波产生两个压力峰值, 当第二排液滴爆炸后, 便有二对爆炸波产生四个压力峰值, 随后有第三第四排等。为进一步描述爆炸波与引导激波作用的特征, 图 7-13 为  $x-t$  图。



图 7-13 爆炸波传播的  $x-t$  图

### 7.2.3 一维 ZND 模型<sup>[17.3]</sup>

#### 一、守恒方程

一维 ZND 模型将爆轰波视作由引导激波和后随弛豫区构成。由于液滴通常具有较高的反应活化能,故具有较长的点火延迟时间。明显存在的点火面将爆轰波的弛豫区划分为诱导区和反应区。为便于讨论,基于如下假设

(1) 气体为完全气体,大小相等不可压缩的燃料液滴在波前呈

一维分布,忽略液滴间的相互影响和热运动。

(2)诱导区内燃料不反应,温度为常数,且以雾化微粒和残存液滴两种形式存在,雾化微粒的运动速度与气相速度相同。反应区内,雾化燃料的反应速率无穷大,故液滴雾化过程是燃烧过程的决定步骤。激波坐标中,诱导区的守恒方程为

$$\text{质量守恒方程 } \rho_g u_g + \rho_l u_l + \rho_a u_g = (\rho_{g0} + \rho_{l0})D \quad (7-54)$$

$$\text{动量守恒方程 } \rho_g u_g^2 + \rho_l u_l^2 + \rho_a u_g^2 + p = (\rho_{g0} + \rho_{l0})D^2 + p_0 \quad (7-55)$$

$$\begin{aligned} \text{能量守恒方程 } \quad & \frac{1}{2}(\rho_g + \rho_a)u_g^3 + \frac{1}{2}\rho_l u_l^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1}pu \\ & = \frac{1}{2}(\rho_{g0} + \rho_{l0})D^3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}p_0D \end{aligned} \quad (7-56)$$

$$\text{数密度守恒方程 } nu_l = n_0D \quad (7-57)$$

其中  $\rho_a$  为雾化燃料浓度,  $n$  为液滴颗粒数密度,  $D$  为爆轰波速度。

反应区的守恒方程为

$$\text{质量守恒方程 } \rho_g u_g + \rho_l u_l^2 = (\rho_{g0} + \rho_{l0})D \quad (7-58)$$

$$\text{动量守恒方程 } \rho_g u_g^2 + \rho_l u_l^2 + p = (\rho_{g0} + \rho_{l0})D^2 + p_0 \quad (7-59)$$

$$\begin{aligned} \text{能量守恒方程 } \quad & \frac{1}{2}\rho_g u_g^3 + \frac{1}{2}\rho_l u_l^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1}pu_g + \rho_l u_l(CT_l + Q) \\ & = \frac{1}{2}(\rho_{g0} + \rho_{l0})D^3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}p_0D + \rho_{l0}D(CT_l + Q) \end{aligned} \quad (7-60)$$

点火面可根据(7-44)式和(7-45)式来确定。由(7-59)式和(7-60)式有

$$\frac{du_g}{dx} = \frac{G}{\gamma p(M_s^2 - 1)} \quad (7-61)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } G = & -\frac{dm_l}{dt}\gamma u_g(u_l - u_g) - (\gamma - 1)\left(CT_l + Q + \frac{u_l^2 - u^2}{2}\right) \\ & + m_l u_l \frac{du_l}{dx}((\gamma - 1)nu_l - \gamma nu_g) \end{aligned}$$

显然,当  $M_s = 1$  时,欲使方程(7-61)有解必有  $G = 0$ ,称此为气云爆轰的 C-J 条件。

液滴与气相间的质量输运即液滴雾化采用<sup>[18]</sup>

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{3kN_s(T_g - T_l)}{\pi L r \rho_l} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi^2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{v_g}{v_l}\right)^{\frac{1}{6}} (v_l u_g)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u_l}{u_g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-62)$$

右端第一项表示液滴的高温蒸发,其中 $r$ 为液滴半径, $k$ 为蒸发常数, $L$ 为气化潜热。第二项即方程(7-40),表示液滴的剥离雾化。考虑气流作用下的液滴变形时,设变形后的液滴为椭球形,长轴半径为 $a$ ,短轴半径为 $b$ ,采用 Gordon 模型<sup>[19]</sup>有方程

$$u_l^2 \frac{d^2 s}{dx^2} + u_l \frac{du_l}{dx} \frac{ds}{dx} = \frac{\pi a^2 \rho_g (u_l - u_g)^2}{2 \rho_l V} \quad (7-63)$$

其中 $s = \frac{r_0}{r}(r_0 - b)$ 为流动方向变形率, $r_0$ 为未变形时的液滴半径,

$\bar{r} = \left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{\frac{1}{3}}$ 为椭球液滴的等效半径, $V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$ 。用 $a$ 替代(7-62)式中右端的 $r$ 即可。

液滴与气相间的动量输运用 Stokes 方程描述

$$\frac{du_l}{dx} = \frac{F}{u_l m_l}$$

其中 $F = C_D \frac{\pi d^2}{8} \rho_g |u_g - u_l| (u_g - u_l)$

$$C_D = \begin{cases} 0 & Re^{-0.84} & 0 < Re < 80 \\ 0.271 & Re^{0.271} & 80 < Re < 10^4 \\ 2 & & Re > 10^4 \end{cases}$$

$Re = \frac{\rho_g d |u_g - u_l|}{\mu_g}$ 为液滴 Reynolds 数。

## 二、弛豫结构

根据上述讨论,采用如下步骤计算气云爆轰的爆速和弛豫结构:

- (1) 假定爆速 $D^{(0)}$ 。
- (2) 根据正激波关系式计算引导激波波后参数。
- (3) 根据诱导区方程计算该区的参数。
- (4) 根据点火判据确定点火面。

(5) 根据反应区方程计算该区的参数。

(6)  $M_s=1$  时若  $G=0$ , 假定爆速即为  $C-J$  爆速, 计算结束。否则修正  $D^{(0)}$ , 重复上述过程直至该条件满足。

以癸烷( $C_{10}H_{22}$ )液滴和氧气混合物为例<sup>[17]</sup>, 初始直径  $d_0=400\mu\text{m}$ ,  $\rho_{i0}=0.3\text{kg/m}^3$ ,  $p_0=1\text{atm}$ ,  $T_0=293\text{K}$ , 计算结果爆速  $D=$

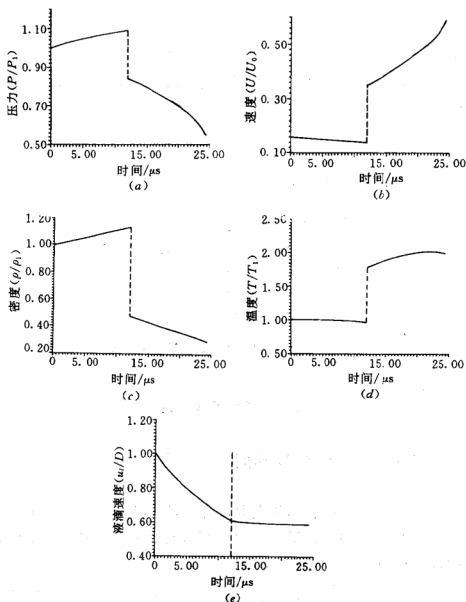


图 7-14 气云爆轰波弛豫区内的参数分布

1676m/s, 点火延迟时间  $t_{ig} = 12\mu\text{s}$ 。弛豫区内参数分布如图 7-14 所示。显然, 诱导区内的参数变化与惰性颗粒激波弛豫区的参数变化趋势一致, 两相效应的影响占主导地位。点火时雾化燃料立即燃烧, 部分能量于瞬间释放, 气相参数出现突跃, 温度和速度升高, 密度和压力降低。反应区内各参数变化趋势与气相爆轰波一致, 化学反应在该区域占主导地位。

图 7-15 为液滴质量变化曲线, 它反映了液滴能量的释放速率, 据此可对局部爆炸进行计算, 引导激波与爆炸波碰撞所导致的强度涨落幅度为 0.016。C-J 面上液滴未能完全燃烧, 这导致爆速的亏损。

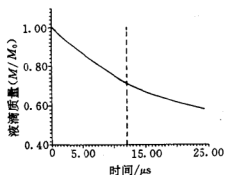


图 7-15 气云爆轰波液滴质量变化曲线

## 7.3 粉尘爆轰

### 7.3.1 一维 ZND 模型<sup>[20,21]</sup>

设气体为完全气体, 粉尘颗粒为空间均匀分布的大小相等不可压缩的球, 忽略其体积、相互作用以及对压力的贡献。激波坐标中, 基于一维 ZND 模型的粉尘爆轰波的守恒方程为

$$\rho_g u_g + \rho_p u_p = G_g(1 + \eta) \quad (7-64)$$

$$G_g(1+\eta)(1-\phi)u_g + G_g(1+\eta)\phi u_g + p = G_g(1+\eta)u_{g0} + p_0 \quad (7-65)$$

$$(1+\eta)(1-\phi)\left(\frac{u_g^2}{2} + c_g T_g\right) + \phi(1+\eta)\left(\frac{u_g^2}{2} + \delta c_g \bar{T}_g\right) + (1+\eta)\phi Q = (1+\eta)\frac{u_{g0}^2}{2} + (1+\eta\delta)c_g T_0 + \eta Q \quad (7-66)$$

$$nu_g = n_0 u_{g0} \quad (7-67)$$

其中  $G_g = \rho_{g0} u_{g0}$ ,  $\eta = \frac{\rho_p}{\rho_{g0}}$ ,  $\phi = \frac{\rho_p u_p}{G_g(1+\eta)}$ ,  $\delta = \frac{c}{c_g}$ ,  $c$  和  $c_g$  分别表示颗粒比热和气体定压比热,  $Q$  为单位质量的颗粒的反应热,  $\bar{T}_g$  为颗粒平均温度。

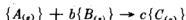
颗粒运动轨迹方程为

$$\frac{du_g}{dt} = \frac{u_g - u_p}{\tau_s} \quad (7-68)$$

引导激波后, 气体状态发生突跃但颗粒保持波前状态不变, 因此颗粒处于高温、高压和高速运动的气流中。高温气体对颗粒的持续加热和化学反应给予颗粒的热皆使颗粒温度不断上升, 以致最终点火, 故粉尘爆轰的弛豫区分为两部分: 诱导区和反应区, 前者起于引导激波止于点火面, 后者起于点火面止于 C-J 面。

### 一、颗粒的激波点火<sup>[22]</sup>

除固有孔隙外, 颗粒间的相互粘结或挥发分的逸出皆可形成多孔颗粒, 故讨论界面燃烧时, 多孔颗粒更具普遍性。设有一步不可逆反应:



下标(g)表示气态, (s)表示固态颗粒。其反应速率为

$$R_p = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_g}\right) C_{ox} S_g = k_g C_{ox}$$

其中  $R_p$  为单位体积的颗粒的质量消耗率,  $A$  为频率因子,  $C_{ox}$  为气体中氧化剂浓度,  $S_g$  为比表面积。设颗粒孔内流场关于颗粒球心对称, 颗粒内氧气守恒方程应为

$$\frac{D_e}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dC_{ox}}{dr} \right) - \frac{R_r}{b} = 0$$

边界条件为

$$r = 0 \text{ 时} \quad \frac{dC_{ox}}{dr} = 0$$

$$r = r_0 \text{ 时} \quad C_{ox} = (C_{ox})_0$$

其中  $r_0$  为颗粒半径,  $(C_{ox})_0$  为颗粒表面处的浓度。该方程有解

$$\frac{C_{ox}}{(C_{ox})_0} = \frac{\text{sh}(h_s \bar{r})}{r \text{sh}(h_s)} \quad (7-69)$$

其中  $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$ ,  $h_s = r_0 \left( \frac{k_r}{bD_e} \right)^{\frac{1}{2}}$ 。

颗粒内氧气浓度分布的计算结果如图 7-16 所示。颗粒温度较低时, 因其化学活性未被激发, 其反应速率亦较低, 故气体有足够的时间经由孔隙向颗粒内部渗透。此时孔内氧气浓度的梯度很小, 反应发生在整个颗粒内部。当颗粒温度较高时反应速率也较大, 氧气渗透到一定深度后因反应而耗尽, 此时浓度曲线分为两部分, 一部分浓度梯度极大, 另一部分浓度为零。

颗粒内部的能量守恒方程为

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} = \frac{k_e}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) + R_r \frac{Q}{\rho_p c} \quad (7-70)$$

其中  $k_e = \frac{k}{\rho_p c}$  为有效热扩散率,  $k$  为热传导系数,  $\rho_p$  为颗粒密度。

边界条件为  $k \frac{dT_r}{dr} \Big|_{r=r_0} = h_i (T_f - T_{ps})$

其中  $h_i$  为颗粒表面换热系数,  $T_f$  为颗粒表面气体薄膜温度,  $T_{ps}$  为颗粒表面温度。该方程可用 Crank-Nicolson 格式求解, 计算结果如图 7-17 所示。

激波作用下, 温度均匀的颗粒置于高温气流中, 气体的加热和孔隙界面的反应使颗粒内的温度分布不断变化, 逐渐形成温度梯度极大的外壳和温度均匀的内核。这说明高温气流对颗粒的加热是影响颗粒温度分布和导致颗粒点火的主要因素。随颗粒表层温度和反应速率的不断升高, 一段时间后, 会出现表面温度的突跃,

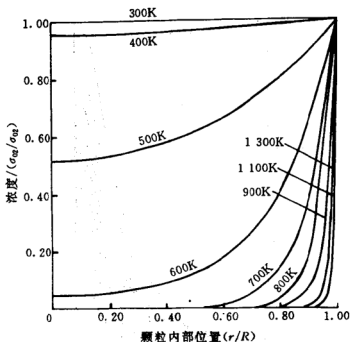


图 7-16 颗粒内氧气浓度分布

突跃温度称为点火温度,此时颗粒开始点火。点火前,颗粒大小的变化可以忽略,如果考虑孔隙的变化,有

$$\rho_t \frac{d\varepsilon}{dt} = R_p$$

其中  $\rho_t$  为颗粒材料密度,  $\varepsilon$  为孔隙度。该方程初始条件为  $t=0$  时  $\varepsilon=\varepsilon_0$ , 颗粒密度为  $\bar{\rho}_p = \rho_t(1-\varepsilon)$ 。

## 二、颗粒燃烧

图 7-16 表明颗粒温度愈高,含氧层愈薄。颗粒点火时,氧气仅在外表面附近存在。根据计算,  $50\mu\text{m}$  的颗粒点火时含氧层的厚度仅  $0.2\mu\text{m}$ 。此时,颗粒的燃烧速率决定于氧气向颗粒内部的扩散速率。由(7-69)式得

$$\left. \frac{dC_{O_2}}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{h_s}{r_0} \left( \text{ch } h_s - \frac{1}{h_s} \right) (C_{O_2})_0$$

进入颗粒的氧气皆立即反应,故颗粒单位表面积的反应速率为



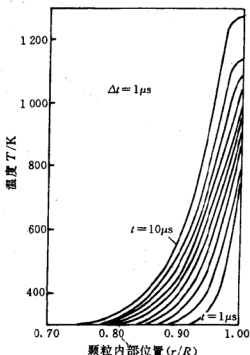


图 7-17 点火前颗粒内的温度分布

$$\mathcal{R}_s = k_s(C_{ox})_0 + D_s \left. \frac{dC_{ox}}{dr} \right|_{r=0} = k'_s(C_{ox})_0 \quad (7-71)$$

其中 
$$k'_s = k_s + \lambda D_s \left[ \text{ch}(\lambda r_0) + \frac{1}{\lambda r_0} \right] \quad (7-72)$$

$k_g = \frac{k_p}{b}$ ,  $\lambda = \frac{h_s}{r_0}$ 。一般  $k_p$  的值较大, 故(7-72)式可简化为

$$k'_s = k_s + \lambda D_s \quad (7-73)$$

因此, 颗粒直径变化方程为

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{bk'_s}{\rho_s} (C_{ox})_0$$

单位体积的颗粒气体混合物内氧气的消耗率为

$$\frac{dC_{ox}}{dt} = -\frac{n}{b} \frac{dm_s}{dt} = -\frac{n}{b} 4\pi \bar{\rho}_s r_0^2 \frac{dr_0}{dt}$$

其中  $m_s$  为单个颗粒质量。进而有

$$\frac{dY_{ox}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{C_{ox}}{\rho_g} \right) = \frac{bC_{ox} - \rho_g}{\rho_g^2} \frac{dC_{ox}}{dt}$$

由于反应出现在颗粒界面,故颗粒的能量守恒方程为

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} = \frac{k_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \quad (7-74)$$

其边界条件为

$$k \frac{dT_r}{dr} \Big|_{r=r_0} = h_i(T_f - T_s) + Q \bar{\rho}_s \frac{dr_0}{dt}$$

该方程可用 Crank-Nicolson 格式求解,计算结果如图 7-18 所示。颗粒点火后,外表层的剧烈燃烧使表面温度超过气流温度,于是颗粒向气相传热,这导致颗粒内的最高温度由表面向内部转移。随着颗粒的缩小,颗粒温度渐趋均匀。

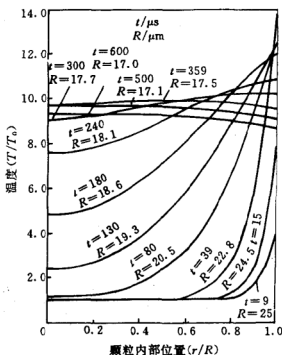


图 7-18 点火后颗粒内的温度分布

### 三、Chapman-Jouguet 条件

由方程(7-64)~方程(7-66)可推得

$$(1 - \phi)u_s \frac{du_s}{dx} = \frac{G_1 \frac{d\phi}{dx} + G_2 \frac{du_s}{dx} + G_3 \frac{d\bar{T}_s}{dx}}{1 - \frac{1}{M^2}} \quad (7-75)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\gamma+1}{2}u_s^2 - \gamma u_s u_s + \frac{\gamma-1}{2}u_s^2 + (\gamma-1)Q \\ &\quad + (\gamma-1)\delta C_s \bar{T}_s, \\ G_2 &= \phi[(\gamma-1)u_s - \gamma u_s] \\ G_3 &= (\gamma-1)\phi\delta C_s \\ M &= \frac{u_s}{a} \end{aligned}$$

显然,  $M=1$  为方程(7-75)的奇点。仅当方程右端分子也同时为零时,该点才可能具有连续解。故方程具有连续解的条件为

$$M=1 \text{ 时 } G_1 \frac{d\phi}{dx} + G_2 \frac{du_s}{dx} + G_3 \frac{d\bar{T}_s}{dx} = 0 \quad (7-76)$$

该条件与守恒方程联立可唯一确定引导激波的速度。该速度称为  $C-J$  爆速,上述条件为  $C-J$  条件。

根据 L'Hôpital 法则,方程(7-76)还可写成

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \left( \frac{du_s}{dx} \right)_* &= \\ \frac{\left\{ [(\gamma-1)u_s - \gamma u_s] \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_* - \gamma \phi \left( \frac{du_s}{dx} \right)_* \right\} \left( \frac{du_s}{dx} \right)_* - F}{\left( \frac{du_s}{dx} \right)_* - \left( \frac{da}{dx} \right)_*} & \quad (7-77) \end{aligned}$$

其中脚标“\*”表示  $M=1$ ,  $F=F\left(\frac{du_s}{dx}, \frac{d\phi}{dx}, \frac{d\bar{T}_s}{dx}, \frac{d^2u_s}{dx^2}, \frac{d^2\phi}{dx^2}, \frac{d^2\bar{T}_s}{dx^2}\right)$ 。方程(7-77)的解为

$$\left( \frac{du_s}{dx} \right)_* = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AF}}{2A}$$

其中  $A=2(1-\phi)$

$$B = 2(1 - \phi) \left( \frac{da}{dx} \right) + [(\gamma - 1)u_s - \gamma u_s] \left( \frac{d\phi}{dx} \right) - \gamma \phi \left( \frac{du_s}{dx} \right)$$

通常有两根光滑积分曲线通过  $M=1$  点, 故  $C-J$  点是鞍点。

#### 四、弛豫结构

根据以上讨论, 以淀粉 ( $C_6H_{10}O_5$ ) 颗粒与氧气混合物为例<sup>[20]</sup>,

初始直径  $d_0 = 50 \mu\text{m}$ ,  $\rho_s = 1070 \text{kg/m}^3$ ,  $\varepsilon_0 = 0.3$ ,  $S_g = 3 \times 10^8 \frac{1}{\text{m}}$ ,  $\eta = 0.31$ ,  $p_0 = 1 \text{atm}$ ,  $T_0 = 293 \text{K}$ 。计算结果为, 爆速  $D = 1530 \text{m/s}$ , 点火延迟时间  $t_{ig} = 9 \mu\text{s}$ 。弛豫区内参数分布如图 7-19 所示。诱导区内因两相效应为主导因素, 故压力和密度呈上升趋势, 速度呈下降趋势。随化学反应速率的增加, 特别是点火后, 即反应区内的化学反应效

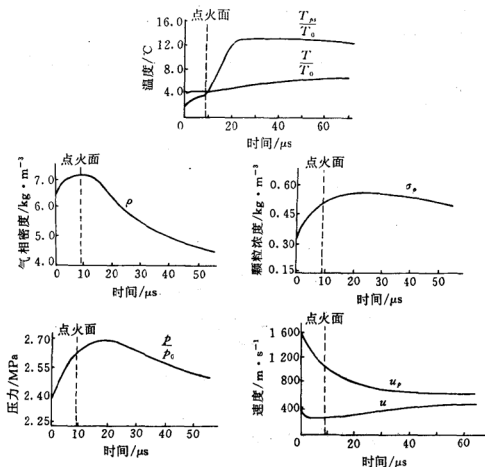


图 7-19 粉尘爆炸波弛豫区内的参数分布

应逐渐成为主导因素。于是,这些参数在某点取极值后将以相反的趋势变化。

图 7-20 为颗粒半径变化曲线。点火前,由于化学反应以极慢的速度发生在颗粒内部,故可忽略颗粒半径的变化。点火后,尽管非均相化学反应的速度很大,但氧气不能向颗粒内部渗透,反应仅在颗粒外壳进行,故颗粒半径仍以有限速率变化。随着氧气浓度的降低,颗粒半径的收缩率也随之下降。

气相爆轰的点火延迟时间比较短,能量释放是连续的,其弛豫结构由化学反应所决定,流场参数多半呈单调变化。凝聚态燃料的活化能比较高,故点火延迟时间较长。点火前,两相效应决定了诱导区的结构。对于气云爆轰,点火时,雾化燃料瞬间燃烧,能量突然释放,这导致气相参数的突跃。点火后,化学反应占优势,流场参数的变化趋势与气相爆轰相同。粉尘爆轰的点火燃烧大都发生在颗粒表面,其能量释放不如气云点火时激烈,故气相参数是连续的。特别是点火后的一段时间内,两相效应仍占一定优势。因此,粉尘爆轰的弛豫结构与气云爆轰也不尽相同。

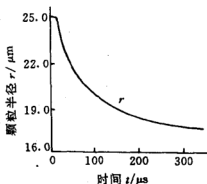


图 7-20 粉尘爆轰波颗粒半径变化曲线

### 7.3.2 双阵面粉尘爆轰<sup>[23,24]</sup>

易点燃的燃料—氧化剂气相混合物中如果混有可燃颗粒(粉

尘或液滴),爆轰时,可能出双阵面的爆轰波,如图 7-21 所示。该现象已为实验所证实<sup>[25]</sup>。在第一引导激波  $F_1$  的作用下,点火延迟时间短的气相混合物首先点燃,迅速燃烧,并在颗粒点火之前于第一  $C-J$  面上满足  $C-J$  条件,故第一爆轰波是一种含有惰性颗粒的气相爆轰波。 $C-J$  点是鞍点,其后的流场有两种可能的变化趋势,这决定于颗粒的浓度<sup>[26]</sup>。高颗粒浓度时为亚声速流动,但流场最终因壅塞而不能定常。低颗粒浓度时为超音速流动可以形成第二道激波  $F_2$ ,在其作用下流场成为亚声速。随着反应能量的释放,质点速度上升,在声速点满足  $C-J$  条件,以致流场定常形成双阵面爆轰。

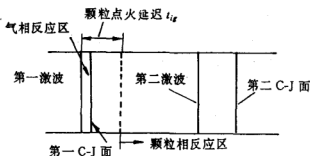


图 7-21 双阵面爆轰波示意图

仍基于一维 ZND 模型<sup>[23]</sup>,设颗粒温度均匀,根据直径大小将其分为  $N$  组。激波坐标中,守恒方程的微分形式为

$$\frac{d}{dx}(\rho_p u_p) = -J_i \quad (7-78)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho_p u_p^2) = n_i F_i - J_i u_p \quad (7-79)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho_p u_p e_p) = n_i Q_i - J_i e_p \quad (7-80)$$

其中  $i=1, \dots, N$  表示第  $i$  组颗粒;  $J_i$  为两相间的质量传递,与颗粒燃烧速率有关;  $n_i F_i$  为两相间的动量传递,  $F_i$  表示单个颗粒所受的力,有

$$F_i = \frac{\pi}{8} C_D \rho_g d_p^2 (u_g - u_p) |u_g - u_p|$$

$Q_p$  为单个颗粒与气相的对流热传导, 有

$$Q_p = 2\pi r_p N_s k (T_g - T_p)$$

$e_p$  为颗粒比内能, 对于金属粉尘, 考虑到不同温度下的相变(如气化、熔化等), 有

$$e_p = \begin{cases} CT_p + Q_{ck} & T_p > T_p^{\text{melt}} \\ CT_p + Q_{ck} + \eta^m Q_m & T_p = T_p^{\text{melt}} \\ CT_p + Q_{ck} + Q_m & T_p > T_p^{\text{melt}} \\ CT_p + Q_{ck} + Q_m + \eta^b Q_b & T_p = T_p^{\text{boil}} \end{cases}$$

其中  $T_p^{\text{melt}}$  和  $T_p^{\text{boil}}$  分别表示金属的熔点和沸点,  $Q_{ck}$ ,  $Q_m$  和  $Q_b$  分别表示金属的燃烧热、熔化热和汽化热,  $C$  为金属比热,  $\eta^m$  和  $\eta^b$  分别表示熔化部分和汽化部分的质量分数。

气相

$$\frac{d}{dx}(\rho_g u_g) = \sum_i J_i \quad (7-81)$$

$$\frac{d}{dx}(p + \rho_g u_g^2) = \sum_i (J_i u_{pi} - n_i F_i) \quad (7-82)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \rho_g u_g \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho_g} + \frac{u_g^2}{2} \right) \right) &= \rho_g u_g \lambda Q_g \\ &+ \sum_i \left( J_i \left( e_{pi} + \frac{u_{pi}^2}{2} \right) - n_i F_i u_{pi} - n_i Q_{pi} \right) \end{aligned} \quad (7-83)$$

其中  $\lambda$  为反应度,  $Q_g$  为单位质量的气相混合物反应释放的能量。

颗粒燃烧速率方程可由经验公式给出

$$J_i = \begin{cases} 0 & T_p < T_{ig} \\ \frac{3\rho_p}{t_p} \left( 1 + 0.276 \sqrt{R_{op}} \right) & T_p \geq T_{ig} \end{cases}$$

其中  $T_{ig}$  为颗粒点火温度,  $t_p$  为颗粒完全燃烧时间, 可采用经验公式

$$t_p = k d_{p,0}^n / \phi^{0.9}$$

其中  $k, \eta$  为经验常数,  $d_{p,0}$  为颗粒初始直径,  $\phi$  为氧化剂的体积分

数。

以氢气空气混合物中悬浮铝粉为算例,氢氧当量比为 1.06,  $\rho_{p0} = 49 \text{ kg/m}^3$ , 颗粒按其直径分为 5 组, 分别为  $9 \mu\text{m}$ ,  $11 \mu\text{m}$ ,  $13 \mu\text{m}$ ,  $15 \mu\text{m}$  和  $17 \mu\text{m}$ 。计算结果爆速  $D = 2000 \text{ m/s}$ , 其弛豫区结构如图 7-22 所示。图中  $f$  表示已燃铝粉的质量分数。

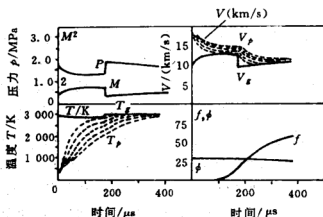


图 7-22 双阵面爆轰的弛豫结构

颗粒存在使爆速降低, 颗粒浓度愈大, 爆速亏损愈大, 如图 7-23 所示。其中曲线  $H_1$ ,  $H_2$  和  $H_3$  分别对应于当量比 0.78, 1.06 和 1.30。

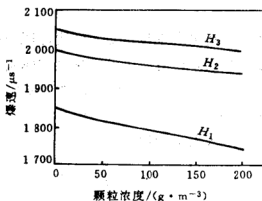


图 7-23 爆速随颗粒浓度变化曲线



## 第八章 薄膜爆轰

激波掠过被液体燃料或可燃粉尘覆盖的壁面时,由于波后两相界面附近高温剪切流的作用,液体薄膜因蒸发或界面失稳而雾化,粉尘也因升力作用而飞扬,于是在壁面附近形成两相可燃混合物。激波足够强时,可燃物被点火进而燃烧,由此释放的热可使激波稳定传播,形成所谓薄膜爆轰。薄膜爆轰的形成机制与粘性边界层有关,因此具有二维结构,平面一维 ZND 模型已不完全适用。

本章内容包括:反应边界层,讨论其守恒方程,特性和壁面质量传递的影响;液体薄膜爆轰,讨论其二维结构,均化处理和  $C-J$  条件;粉尘薄膜爆轰,讨论其二维结构和均化处理等问题。

### 8.1 反应边界层

#### 8.1.1 边界层方程<sup>[1,2]</sup>

尽管  $Re$  数很大时流动的惯性远大于粘性,但壁面附近的粘性仍不可忽略。因此,壁面附近有一个考虑粘性的薄层区域,称为边界层,记其厚度为  $\delta$ ,有  $\delta \ll L^{[1]}$ ,  $L$  为特征长度。流场分为两部分:粘性边界层和无粘的主气流。

对于平板问题,引入无量纲量

$$X^* = \frac{X}{L}, Y^* = \frac{Y}{L} \sqrt{Re}$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}, v = \frac{v}{u_\infty} \sqrt{Re}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_*}, p^* = \frac{p}{\rho_* u_*^2}$$

$$H^* = \frac{H}{u_*^2} (\gamma - 1) M_0^2, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_*}$$

$$t^* = \frac{u_* t}{L}$$

其中脚标  $e$  表示主气流, 守恒方程无量纲化后, 略去与  $\frac{1}{Re}$  有关的项便得到经简化的边界层方程, 其有量纲形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (8-1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8-2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8-3)$$

$$\rho \frac{\partial Y_i}{\partial t} + \rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + \dot{\omega}_i \quad (8-4)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{1}{Le} \right) \rho D \sum_i h_{c,i} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (8-5)$$

定常时

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (8-6)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8-7)$$

$$\rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + \dot{\omega}_i \quad (8-8)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{1}{Le} \right) \rho D \sum_i h_{c,i} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (8-9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8-3)$$

对于稳定激波诱导的边界层,可将坐标建立在激波上,即对方程(8-1)~方程(8-5)进行 Galilean 变换。变换后流场定常,其方程与方程(8-6)~方程(8-9)形式一致,仅  $u$  和  $H$  是在不同坐标中定义的。

### 8.1.2 自模拟解

当  $u_e, Y_{ie}$  和  $H_e$  为常数时,方程(8-6)~方程(8-9)有自模拟解<sup>[1]</sup>。引入自模拟变量

$$\eta = \frac{\rho_e u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy$$

和无量纲量  $f(\eta) = \frac{p_e}{\sqrt{2\xi}} \psi, f'(\eta) = \frac{u}{u_e}, Z_i(\eta) = \frac{Y_i}{Y_{ie}}$  和  $g(\eta) = \frac{H}{H_e}$ , 于是

$$(cf'')' + ff'' = 0 \quad (8-10)$$

$$\left( \frac{c}{S_c} Z_i' \right)' + fZ_i' = - \frac{2\xi \dot{\omega}_i}{\rho_e u_e^2 \mu_e Y_{ie} \rho} \quad (8-11)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{c}{P_r} g' \right)' + fg' &= \frac{u_e^2}{He} \left( c \left( \frac{1}{P_r} - 1 \right) f' f'' \right)' \\ &+ \left\{ \frac{c}{S_c} \left( \frac{1}{Le} - 1 \right) \sum_i \frac{h_{ie} Y_{ie}}{He} Z_i' \right\}' \end{aligned} \quad (8-12)$$

其中  $\xi = \rho_e u_e \mu_e x$ ,  $\psi$  为流函数, 有  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{u}{RT}, \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{v}{RT}, c = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}$ 。

#### 一、冻结边界层

当  $\frac{2\xi \dot{\omega}_i}{\rho_e u_e^2 \mu_e Y_{ie} \rho} \ll 1$  时, 边界层内的反应被冻结, 有

$$\left( \frac{c}{S_c} Z_i' \right)' + fZ_i' = 0$$

$$\left( \frac{c}{P_r} g' \right)' + fg' = \frac{u_e^2}{He} \left( c \left( \frac{1}{P_r} - 1 \right) f' f'' \right)'$$

或 
$$\left( \frac{c}{P_r} \theta' \right)' + f\theta' + \frac{c}{c_s} \frac{u_e^2}{T_e} (f'')^2 = 0$$

其中  $\theta = \frac{T}{T_*}$ , 当  $c = \text{常数}$ ,  $P_r = \text{常数}$ ,  $S_c = \text{常数}$  时, 上述诸式写成

$$\left( \frac{E_1 Z_i'}{G_1} \right)' = 0 \quad (8-13)$$

$$\left( \frac{E_2 g'}{G_2} \right)' + \frac{u_*^2}{He} \left( c \left( 1 - \frac{1}{P_r} \right) f' f'' \right)' = 0 \quad (8-14)$$

$$\left( \frac{E_2 \theta'}{G_2} \right)' + \frac{c}{c_p} \frac{u_*^2}{T_*} (f'')^2 = 0 \quad (8-15)$$

其中  $E_1 = \frac{c}{S_c}$ ,  $E_2 = \frac{c}{P_r}$ ,  $G_j = \exp \left( - \int_0^\eta \frac{f}{E_j} d\eta \right)$ 。

方程(8-13)的初始条件为

$$\eta = 0 \text{ 时} \quad Z_i = Z_{iw}, Z_i' = Z_{iw}', G = 1$$

$$\eta = \infty \text{ 时} \quad Z_i = 1$$

$$\text{故} \quad \frac{Z_i - Z_{iw}}{1 - Z_{iw}} = \frac{\mathcal{G}_1(\eta)}{\mathcal{G}_1(\infty)} \quad (8-16)$$

$$Z_{iw}' = \frac{1 - Z_w}{E_1 \mathcal{G}_1(\infty)}$$

其中

$$\mathcal{G}_j(\eta) = \int_0^\eta G_j d\eta$$

方程(8-15)的初始条件为

$$\eta = 0 \text{ 时} \quad \theta = \theta_w, \theta' = \theta_w', G = 1$$

$$\eta = \infty \text{ 时} \quad \theta = 1$$

故

$$\theta - \theta_w = \theta_w' \mathcal{G}_2(\eta) - \frac{u_*^2 P_r}{c T_*} \int_0^\eta G_2 \int_0^\eta \frac{(f'')^2}{G_2} d\eta d\eta \quad (8-17)$$

$$\theta_w' = \frac{1 - \theta_w + \frac{u_*^2}{2c T_*} r}{\mathcal{G}_2(\eta)} \quad (8-18)$$

其中  $r = 2Pr \int_0^\infty G_2 \int_0^\eta \frac{(f'')^2}{2} d\eta d\eta$  称为复温因子。

对于绝热壁面,  $\theta_w' = 0$ , 故

$$T_{w*} = T_* + r \frac{u_*^2}{2c_p} \quad (8-19)$$

将(8-18)式和(8-19)式代入(8-17)式得

$$T = T_w + \frac{\mathcal{G}_2(\eta)}{\mathcal{G}_2(\infty)}(T_{\infty} - T_w) - \frac{u_r^2 Pr}{c_p T_w} \int_0^\eta G_2 \int_0^\eta \frac{(f'')^2}{2} d\eta d\eta \quad (8-20)$$

其中  $T_{\infty}$  和  $T_w$  分别表示绝热和非绝热壁面的温度。

方程(8-10)称为 Blasius 方程, 初始条件为

$$\eta = 0 \text{ 时} \quad f = f_w \quad f' = \frac{u_w}{u_\infty}$$

$$\eta = \infty \text{ 时} \quad f' = 1$$

该方程可用数值方法求解。

## 二、平衡边界层

记  $\mu_l$  为第  $l$  种元素在第  $j$  种物质中的质量分数,  $k_l$  为该种元素在混合物中的质量分数,

有 
$$k_l = \sum_j \mu_l Y_j$$

根据元素守恒定律

$$\sum \mu_l \dot{\omega}_j = 0$$

由上述两式和(8-8)式得

$$\rho u \frac{\partial k_l}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k_l}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial k_l}{\partial y} \right) \quad (8-21)$$

同样有  $(E_l \lambda_l')' + f \lambda_l' = 0$

其中  $\lambda_l = \frac{k_l}{k_{l*}}$ , 该方程初始条件为

$$\eta = 0 \text{ 时} \quad \lambda_l = \lambda_{lw}, \lambda_l' = \lambda_{lw}' \quad G = 1$$

$$\eta = \infty \text{ 时} \quad \lambda_l = 1$$

故 
$$\frac{\lambda_l - \lambda_{lw}}{1 - \lambda_{lw}} = \frac{\mathcal{G}_1(\eta)}{\mathcal{G}_1(\infty)} \quad (8-22)$$

$$\lambda_{lw}' = \frac{1 - \lambda_{lw}}{E_1 \mathcal{G}_1(\infty)} \quad (8-23)$$

当边界层内化学反应皆处于平衡状态时, 根据平衡关系式  $Y_l$  可通过  $k_l, p$  和  $T$  求得, 即

$$Y_i = Y_i(g(\eta), f(\eta), k_i)$$

通过迭代可解得平衡边界层的内部结构。

### 8.1.3 壁面条件

#### 一、Reynolds 比拟

对于静止壁面,当  $L_e=1, P_r=1$  时,方程(8-9)写成

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (8-24)$$

$H = h + \frac{u^2}{2}$  = 常数是该方程的特解,称为 CroCo-Busemann 第一积分。由于流体向壁面传递的热  $q_w = -\frac{k}{c_p} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w = -\frac{k}{c_p} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_w$  故  $H = \text{常数}$  对应于  $q_w = 0$ 。因此,该特解对应于绝热壁面。当  $p = \text{常数}$  时,方程(8-7)写成

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8-25)$$

由(8-24)式和(8-25)式得

$$H = au + b$$

其中  $a, b$  为积分常数,此式称为 CroCo-Busumann 第二积分。根据边界条件

$$\frac{H - H_w}{H_e - H_w} = \frac{u - u_w}{u_e - u_w} \quad (8-26)$$

从而有 
$$c_H = \frac{c_f}{2} \quad (8-27)$$

其中  $c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e u_e^2}$  为壁面摩擦系数,  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$  为壁面剪应力。  $c_H = \frac{q_w}{\rho_e u_e (H_w - H_e)}$  为壁面传热系数。(8-26)式和(8-27)式称为 Reynolds 比拟。

#### 二、壁面质量传递

设  $p = \text{const}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ , 于是(8-6)式和(8-7)式写成

$$\rho v = (\rho v)_w = \text{常数}$$

$$(\rho v)_w \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right)$$

令  $Y = \int_0^y \frac{dy}{\mu}$ , 于是

$$(\rho v)_w \frac{du}{dY} = \frac{d^2 u}{dY^2} \quad (8-28)$$

其边界条件为  $Y=0$  时,  $u=u_w$ ,  $\frac{du}{dY} = \tau_w$ ;  $Y=Y_s$  时,  $u=u_s$ , 故

$$Y_s = \frac{1}{(\rho v)_w} \ln \left( 1 + \frac{(\rho v)_w (u_w - u_s)}{\tau_w} \right) \quad (8-29)$$

当  $(\rho v)_w = 0$  时, 即壁面无质量传递时, (8-28) 式写成

$$\frac{d^2 u}{dY^2} = 0$$

有解

$$Y_{s0} = \frac{u_w - u_s}{\tau_{w0}} \quad (8-30)$$

脚标 0 表示无质量传递。由 (8-29) 式和 (8-30) 式得

$$\frac{Y_s}{Y_{s0}} = \frac{\tau_{w0}}{\tau_w} \ln(1 + B)/B$$

其中  $B = \frac{(\rho v)_w (u_w - u_s)}{\tau_w}$ , 称为壁面质量传递系数。根据壁面摩擦系数的定义

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \frac{\tau_w}{\tau_{w0}} = \frac{Y_{s0}}{Y_s} \ln(1 + B)/B$$

若令  $Y_{s0} = Y_s$ , 则

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \ln(1 + B)/B \quad (8-31)$$

或

$$B = \frac{c_{f0} \rho_s u_s^2 (W - 1)^2}{2 \tau_w}$$

其中  $w = \frac{u_w}{u_s}$ 。利用 Reynolds 模拟时, 由 (8-27) 式

$$\frac{c_H}{c_{H0}} = \frac{\ln(1 + B)}{B} \quad (8-32)$$

根据自模拟变量的定义式

$$(\rho v)_w = - \rho_e \mu_e u_e \frac{f_w}{\sqrt{2\xi}} \quad (8-33)$$

$$\tau_w = \frac{c \rho_e \mu_e u_e^2 f_w''}{\sqrt{2\xi}} \quad (8-34)$$

因此,  $f_w$  或  $(\rho v)_w$  一经确定便可通过 Blasius 方程求得边界层内的速度分布, 进而求解其它守恒方程。  $f_w$  有时是初始给定的, 如壁面无质量传递时  $f_w = 0$ ; 因某种原因人为从壁面喷入某种介质时  $f_w$  由注入量来决定。  $f_w$  有时是现象自身决定的本征值, 如壁面烧蚀, 薄膜爆轰等。以平衡边界层为例, 对于由壁面传入的元素  $E$ , (8-21) 写成

$$(E_1 \lambda'_E)_w + f_w \lambda_{Ew} = f_w$$

代入(8-23)式得

$$k_{Ew} = \frac{B_1 + k_{Ee}}{1 + B_1} \quad (8-35)$$

其中  $B_1 = -f_w \mathcal{G}_1(\infty, f_w)$  称为质量传递系数。对非壁面传入元素  $i$ , (8-21) 式可写成

$$(E_1 \lambda'_i)_w + f_w \lambda_{iw} = 0$$

故

$$k_{iw} = \frac{k_{ie}}{1 + B_1} \quad (8-36)$$

$B_1$  可按如下思路求得: 根据壁面温度  $T_w$  求得化学平衡常数  $k$ , 从而求得壁面处各组分的分压和浓度, 再根据组元浓度求得元素在壁面的质量分数, 由(8-35)式或(8-36)式求得  $B_1$  (详见文献[1])。根据  $B_1$  的定义可确定  $f_w$ 。

#### 8.1.4 积分关系式

主气流动量守恒方程可写成

$$\rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = - \frac{dp_e}{dz} \simeq - \frac{dp}{dz}$$

代入(8-7)式



$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8-37)$$

由(8-6)式和(8-37)式

$$\frac{\partial \rho u (u_e - u)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v (u_e - u)}{\partial y} = (\rho u - \rho_e u_e) \frac{\partial u_e}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

其边界条件为

$$y = 0 \text{ 时} \quad \rho v = \rho_e v_w, \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

$$y = \infty \text{ 时} \quad \rho u = \rho_e u_e, \rho v = 0, \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{于是 } \rho_e u_e^2 \left\{ \frac{d\theta}{dx} + \left( 2 + \frac{\delta^*}{\theta} + \frac{u_e}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{du_e} \right) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right\} - (\rho v)_w (u_e - u_w) = \tau_w \quad (8-38)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \delta^* &= \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) d\eta \\ \theta &= \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy = \delta \int_0^1 \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) d\eta \end{aligned}$$

$\delta^*$ 称为排移厚度,表示边界层的存在排移了厚度为 $\delta^*$ 的理想流体的流量。 $\theta$ 为边界层动量损失厚度,表示边界层的存在损失了厚度为 $\theta$ 的理想流体的动量。 $\delta$ 为边界层厚度, $\eta = \frac{y}{\delta}$ 。

若 $u_e$ =常数,方程(8-38)写成

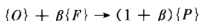
$$\rho_e u_e^2 \frac{d\theta}{dx} = (\rho v)_w (u_e - u_w) + \tau_w \quad (8-39)$$

## 8.2 液体薄膜爆轰

### 8.2.1 燃烧边界层<sup>[3~5]</sup>

激波掠过铺有可燃液体薄膜的壁面时,薄膜经激波作用逐渐雾化,在壁面附近形成燃烧边界层。若将雾化燃料视作一种气相组分,对于稳定传播的激波,激波坐标中的燃烧边界层方程为(8-6)式~(8-9)式,在适当边界条件下,可求其数值解。

如果作某些近似,方程将进一步简化。设化学反应方程为



当  $P_r=1, L_e=1, p_e=\text{常数}$  时,方程组写成

$$\begin{aligned}\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial Y_{ox}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_{ox}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial Y_{ox}}{\partial y} \right) - \dot{\omega}_{ox} \\ \rho u \frac{\partial Y_f}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial Y_f}{\partial y} \right) - \dot{\omega}_f \\ \rho u \frac{\partial H_u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H_u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H_u}{\partial y} \right) + \dot{\omega}_f Q_f \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

令  $Y = Y_f - \beta Y_{ox}, z = H_u + \beta Y_{ox} Q_f, L(A) = \rho u \frac{\partial A}{\partial x} + \rho v \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}$

$\left( \mu \frac{\partial A}{\partial y} \right)$  有  $L(A)=0$ , 其中  $A$  代表  $u, H, Y$  或  $z$ 。

令  $\phi = \frac{A - A_w}{A_e - A_w}$ , 脚标  $e$  和  $w$  分别表示主气流和壁面。有方程

$L(\phi)=0$ , 满足边界条件

$$y=0 \text{ 时} \quad \phi=0$$

$$y=\infty \text{ 时} \quad \phi=1$$

有解

$$\phi = \frac{u - u_w}{u_e - u_w} = \frac{H - H_w}{H_e - H_w} = \frac{Y - Y_w}{Y_e - Y_w} = \frac{z - z_w}{z_e - z_w} \quad (8-40)$$

基于液滴燃烧扩散火焰模型(见 4.3.2 节),边界层内存在无限薄的火焰阵面,将边界层划为两个区域。火焰阵面上满足

$$Y_{ox} = 0$$

$$Y_f = 0$$

$$\left( \rho D \frac{dY_f}{dy} \right)_f = -\beta \left( \rho D \frac{dY_{ox}}{dy} \right)_f$$

$$\text{且 } y > y_f \text{ 时} \quad Y_f = 0$$

$$y < y_f \text{ 时} \quad Y_{ox} = 0$$

脚标  $f$  表示火焰阵面。

故

$$Y = \begin{cases} -\beta Y_{ox} & y > y_f \\ 0 & \\ Y_F & y < y_f \end{cases} \quad (8-41)$$

由方程(8-40)和方程(8-41)

$$\phi_f = \frac{u_f - u_w}{u_e - u_w} = \frac{-Y_w}{Y_e - Y_w} = \frac{Y_{Fw}}{\beta Y_{ox,e} + Y_{Fw}} \quad (8-42)$$

Maxman<sup>[6]</sup>讨论液体表面湍流蒸发时给出边界层内速度分布的半经验公式

$$\frac{u_w - u}{u_w - u_e} = \phi = \eta^n \left( 1 + \frac{B}{2} \eta^n \right) / \left( 1 + \frac{B}{2} \right) \quad (8-43)$$

其中指数  $n$  与切向  $Re$  数有关,取值范围为  $\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10}$ , 当  $Re < 10^6$  时,  $n = \frac{1}{7}$ 。  $B$  为质量传递系数,  $\eta = \frac{y}{\delta}$ ,  $\delta$  为边界层厚度。

由该方程可求得流场的速度,再由(8-40)式求得其它参数。通过(8-42)式和(8-43)式可得到火焰阵面的位置。

边界层厚度通过如下公式获得

根据 Hartunian 半经验公式<sup>[7]</sup>

$$\frac{\theta}{\delta} = 0.137 \left( 1 - \frac{u_w}{u_e} \right) \quad (8-44)$$

代入(8-39)式

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{(1+B)\delta}{\rho_e u_e^2 \theta} \tau_w$$

由(8-31)式,上式写成

$$\frac{d\delta}{dx} = - \frac{C_{f0} \rho_e (u_e - u_w)^2}{2} \frac{(1+B)\delta \ln(1+B)}{\rho_e u_e^2 \theta} \frac{1}{B}$$

如果取

$$\frac{C_{f0}}{2} = 0.03 Re^{-0.2} x^{-0.2}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{0.03}{0.137} \frac{(u_w/u_e - 1)(1+B) Re^{-0.2} \ln(1+B)}{B} x^{-0.2}$$

(8-45)

由该式可求得不同  $x$  处的边界层厚度。

## 8.2.2 壁面条件

由(8-40)式

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w}{u_e - u_w} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_w}{z_e - z_w}$$

即

$$\frac{q_w}{z_w - z_e + u_w(u_e - u_w)} = \frac{\tau_w}{u_e - u_w} \quad (8-46)$$

于是,壁面质量传递系数写成

$$B = \frac{(\rho v)_w(u_e - u_w)}{\tau_w} = \frac{(\rho v)_w(z_w - z_e + u_w(u_e - u_w))}{q_w} \quad (8-47)$$

设壁面质量的射入因薄膜蒸所致,薄膜温度等于壁面温度  $T_1$ 。薄膜的表面温度为  $T_w$ 。设薄膜相对于壁面无相对流动,于是

$$-q_w = (\rho v)_w(L_v + c_l(T_w - T_1)) \quad (8-48)$$

其中  $L_v$  为蒸发潜热,  $c_l$  为液体比热。代入(8-47)式

$$B = \frac{z_e - (z_w + u_w(u_e - u_w))}{L_v + c_l(T_w - T_1)} \quad (8-49)$$

由(8-40)式

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w}{u_e - u_w} = \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_w}{Y_e - Y_w} \quad (8-50)$$

在壁面

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{\partial Y_f}{\partial y}\right)_w$$

$$v_w = (Y_f v_f)_w + (Y_f v_f)_w$$

脚标  $p$  表示产物。由于燃烧产物不溶于液体,即  $v_w = 0$ ,故

$$v_w = (Y_f v_f)_w$$

$$(\rho v)_w = (\rho Y_f v_f)_w = - \left( \rho D \frac{dY_f}{dy} \right)_w + (\rho v Y_f)_w$$

故(8-50)式可写成

$$\frac{\tau_w}{(\rho v)_w(u_e - u_w)} = \frac{Y_{fw} - 1}{Y_e - Y_w}$$

从而有

$$B = \frac{Y_e - Y_w}{Y_{fw} - 1} \quad (8-51)$$

对于扩散火焰  $Y_e = -\beta Y_{\alpha, e}$ ,  $Y_w = Y_{fw}$ , 故

$$B = \frac{Y_{fw} + \beta Y_{\alpha, e}}{1 - Y_{fw}} \quad (8-52)$$

由(8-49)式和(8-52)式

$$\frac{z_e - (z_w - u_w(u_e - u_w))}{L_v + c_l(T_w - T_1)} = \frac{Y_{fw} + \beta Y_{\alpha, e}}{1 - Y_{fw}} \quad (8-53)$$

其中

$$z_e = c_p T_e + \frac{u_e^2}{2} + \beta Y_{\alpha, e} Q_F$$

$$z_w = c_p T_w + \frac{u_w^2}{2}$$

故(8-53)式是一个关于  $Y_{fw}$  和  $T_w$  的方程, 该式与 Clausius-Clapeyron 方程联立可求得  $Y_{fw}$  和  $T_w$ 。简单起见, 有时取  $T_w = T_{boil}$ , 即沸点。

若考虑薄膜厚度变化时, 记其厚度为  $h_f$ , 有方程

$$-\rho_l \frac{dh_f}{dt} = -(\rho v)_w$$

或

$$\frac{dh_f}{dx} = -\frac{(\rho v)_w}{\rho_l u_w} \quad (8-54)$$

当  $x=0$  时,  $h_f = h_f$ 。即薄膜初始温度。故

$$x_c = h_{fo} \frac{\rho_l u_w}{(\rho v)_w}$$

当  $x > x_c$  时为干壁, 当  $x < x_c$  时为湿壁。

### 8.2.3 Chapman-Jouguet 条件<sup>[10]</sup>

考虑截面为矩形, 底壁铺有可燃液体薄膜的爆轰管。

根据 1.1.2 节, 激波坐标中定常流的守恒方程为

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8-55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j - \pi_{ij}) = 0 \quad (8-56)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho u_i H - u_i \tau_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \dot{\omega}_i Q_i \quad (8-57)$$

由于壁面附近的边界层,任一参数  $A$  可写成

$$A = A_e(x) + \Delta A(x, y, z)$$

其中  $A_e$  为主气流的值,  $\Delta A$  为边界层对主气流的偏离。记  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ , 由于  $v_e = 0, \omega_e = 0, p = p_e$ , 故

$$\iint \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} dy dz = L \cdot L_1 (\rho_e u_e)' - L_1 (\rho_e u_e \delta^*)' - (\rho v)_w L_1$$

其中  $L$  和  $L_1$  分别为爆轰管截面的高和宽。' 表示对  $x$  求导。

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) dy dz &= L L_1 (\rho_e u_e^2 + p_e)' \\ &\quad - L_1 (\rho_e u_e^2 (\theta + \delta^*))' - (\rho w)_w L_1 \end{aligned}$$

根据 Gaussian 原理

$$- \iint \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} dy dz = - \oint_L \mu \frac{\partial u}{\partial n} dL = \tau_w L_1$$

其中  $n$  表示壁面外法线方向。

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i H) dy dz &= L L_1 \left( \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 + \rho_e u_e h_e \right)' \\ &\quad - L_1 [\rho_e u_e H_e (\theta_H + \delta^*)]' - L_1 (\rho v H)_w \\ - \iint \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \tau_{ij} dy dz &= - u_w \oint_L \mu \frac{\partial u}{\partial n} dL = u_w \tau_w L_1 \\ &\quad - \iint \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial T}{\partial x_i} dy dz = - \oint_L k \frac{\partial T}{\partial n} dL \\ &= - q_w L_1 \iint \dot{\omega}_i Q_i dy dz = \bar{\omega}_i Q_i L L_1 \end{aligned}$$

其中  $\bar{\omega}_i$  为截面平均反应速率。由上述诸式, 方程(8-55)~方程(8-57)可写成

$$(B_1, \rho u)' = \frac{(\rho v)_w}{L} \quad (8-58)$$

$$p' + (B_2 \rho u^2)' = \frac{(\rho v)_w u_w}{L} - \frac{\tau_w}{L} \quad (8-59)$$

$$\left[ B_3 \left( \frac{1}{2} \rho u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p u \right) \right]' = \frac{(\rho v)_w H_w}{L} - \frac{u_w \tau_w}{L} + \frac{q_w}{L} + \bar{\omega}_s Q_s \quad (8-60)$$

其中  $B_1 = 1 - \frac{\delta^*}{L}$ ,  $B_2 = 1 - \frac{\theta + \delta^*}{L}$ ,  $B_3 = 1 - \frac{\theta_H + \delta^*}{L}$ , 为书写方便, 无脚标表示主气流。积分上式得

$$B_1 \rho u = \rho_0 u_w (1 + \phi) \quad (8-61)$$

$$p + B_2 \rho u^2 = \rho_0 u_w^2 (1 + \phi) - \tau_w \frac{x}{L} + p_0 \quad (8-62)$$

$$B_3 \left( \frac{1}{2} \rho u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p u \right) = \rho_0 u_w H_w (1 + \phi) - u_w \tau_w \frac{x}{L} + q_w \frac{x}{L} + \bar{\omega}_s Q_s x \quad (8-63)$$

其中  $\phi = \frac{(\rho v)_w x}{\rho_0 u_w L}$ , 表示质量注入的影响,  $B_1$  表示边界层的影响,  $\tau_w$  表示壁面摩擦的影响,  $q_w$  表示壁面热传导的影响,  $Q_s$  表示化学反应的影响。

对于液体薄膜爆轰, 当  $x < x_c$  时

$$Q = \bar{\omega}_s Q_s x = \frac{\iiint \bar{\omega}_s Q_s dx dy dz}{LL_1} = \rho_0 u_w \phi Q_s (1 - X_s) \quad (8-64)$$

其中  $X_s = \int_0^{y_b} \rho \tilde{Y}_F \tilde{u} dy / (\rho_0 u_w L \phi)$  表示流进该区域的燃料的未燃百分数,  $\sim$  表示边界层内的值,  $y_b$  表示  $x$  处火焰阵面的位置。当  $x > x_c$  时

$$Q = \rho_0 u_w \phi_c Q_s$$

其中  $\phi_c = \frac{(\rho v)_w x_c}{\rho_0 u_w L}$ 。

设  $C-J$  面附近  $B_i = \text{常数}$ ,  $\bar{\omega}_s = \frac{(\rho v)_w}{L}$ , 由 (8-58) 式 ~ (8-60) 式

$$\frac{\gamma L}{\gamma - 1} p [B_4 M^2 - 1] u' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} u B_2 (G_2 - u G_1) - G_3 - \frac{1}{2} u^2 G_1 \quad (8-65)$$

其中  $M = \frac{u}{a}$ ,  $B_4 = 1 - \frac{(\theta + \delta^*) \gamma}{L}$ 。欲使该式有解, 必有

$$M^2 = \frac{1}{B_4} \text{ 时}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} u B_2 (G_2 - u G_1) - G_3 + \frac{1}{2} G_1 u^2 = 0 \quad (8-66)$$

其中

$$G_1 = \frac{(\rho v)_w}{B_1}$$

$$G_2 = \frac{(\rho v)_w u_w - \tau_w}{B_2}$$

$$G_3 = \frac{(\rho v)_w H_w - \tau_w u_w + q_w + (\rho v)_w Q_s}{B_3}$$

此条件称为  $C-J$  条件。由于  $C-J$  面上  $u^2 = \frac{\gamma p}{B_1 \rho}$ , 故由 (8-61) 式 ~ (8-63) 式得

$$p = \frac{F_2 B_4}{\gamma B_2 + B_4} \quad (8-67)$$

$$u = \frac{2 F_3 B_4 (\gamma - 1)}{\gamma p B_3 (\gamma - 1 + 2 B_4)} \quad (8-68)$$

$$\rho = \frac{\rho_0 u_w (1 + \phi)}{B_1 u} \quad (8-69)$$

其中

$$F_2 = \rho_0 u_w^2 (1 + \phi_j) - \tau_w \frac{x_j}{L} + p_0$$

$$F_3 = \rho_0 u_w H_w (1 + \phi_j) - u_w \tau_w \frac{x_j}{L} + q_w \frac{x_j}{L} + Q_j$$



脚标  $j$  表示  $C-J$  面上的值。

综上所述,  $T_w$  根据壁面材料给定<sup>[9]</sup>,  $T_i$  可以取沸点或由(8-53)式和(4-35)式求得; 预先假定  $u_w^{(0)}$ , 由(8-40)式~(8-44)式, (8-47)式~(8-49)式和(8-51)式可求得  $(\rho v)_w, q_w, \tau_w, \delta, H(y), u(y), \rho(y), \delta^*, \theta$  和  $\theta_w$ ; 利用上述诸值由(8-67)式~(8-69)式和(8-66)式可求得  $u_w^{(1)}$  和  $C-J$  参数, 如  $x_j, \phi_j, p_j$  等等。如果  $u_w^{(0)}$  和  $u_w^{(1)}$  满足误差要求, 计算结束, 否则重新假定  $u_w^{(0)}$ , 重复上述步骤直至满足要求为止。

### 8.3 粉尘薄膜爆轰

#### 8.3.1 燃烧边界层<sup>[11~13]</sup>

##### 一、基本方程

激波作用下, 沉积于壁面的可燃粉尘将被卷扬, 在空中形成粉尘云。激波足够强时, 粉尘颗粒可能被点火进而发展为带状预混火焰。燃烧释放的热可使激波自持形成粉尘薄膜爆轰。参照 8.1.1 节, 燃烧粉尘云的边界层方程为

$$\begin{aligned}
 \text{气相} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \Gamma \\
 & \rho \left( \frac{\partial Y_i}{\partial t} + u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + v \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + \Gamma_i \\
 & \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - V_r \\
 & \frac{\partial p}{\partial y} = - V_r \\
 & \rho \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{P_r} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{1}{P_r} \right) \mu \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] + S_Q
 \end{aligned}$$

颗粒相

$$\frac{d\rho_p}{dt} = -\Gamma - \rho_p \left( \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right)$$

$$\rho_p \frac{du_p}{dt} = V_x + (u_p - u)\Gamma$$

$$\rho_p \frac{dv_p}{dt} = V_y + (v_p - v)\Gamma$$

$$\rho_p c \frac{dT_p}{dt} = Q + S_{Qp}$$

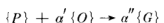
其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_p \frac{\partial}{\partial x} + v_p \frac{\partial}{\partial y}$$

$$S_Q = \Gamma(\beta Q_c + H_p - H) - Q - u_p V_x - v_p V_y$$

$$S_{Qp} = [(1 - \beta)Q_c - (u_p - u)u_p - (v_p - v)v_p]\Gamma$$

$\Gamma$  表示两相间的质量输运,若采用一步表面反应



其中  $P$ 、 $O$  和  $G$  分别表示颗粒、氧化性气体和气相燃烧产物,反应速率用 Arrhenius 定律表示

$$R_s = \frac{1}{\alpha} Y_{\infty} A \exp \left( - \frac{E}{RT_p} \right)$$

则有

$$\Gamma = -n_p (\pi d_p^2) \bar{\rho}_p R_s$$

$V$  表示两相间的动量输运,下标  $x, y$  分别表示相应坐标方向上的分量。只考虑气动阻力、升力和重力作用时

$$V_x = \rho_p f_x$$

$$V_y = \rho_p (f_y + f_L - g)$$

其中单位质量的颗粒所受气动阻力

$$f_x = \frac{u - u_p}{\tau_s}$$

$$f_y = \frac{v - v_p}{\tau_s}$$

$\tau_s = \frac{Ad_p^2 \bar{\rho}_p}{3C_D R_{cp} \mu}$  为动量弛豫时间,  $R_{cp} = \frac{\rho d_p ((u - u_p)^2 + (v - v_p)^2)^{\frac{1}{2}}}{\mu}$  为颗粒滑移  $Re$  数,  $C_D$  为阻力系数,采用标准阻力系数公式

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{R_{ef}} \left( 1 + \frac{1}{6} R_{ef}^{2/3} \right) & R_{ef} \leq 1000 \\ 0.44 & R_{ef} > 1000 \end{cases}$$

单位质量的颗粒所受 Saffman 升力

$$f_L = \text{Sgn} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{3k}{2\pi d_p \rho_p} (u - u_p) \left( \rho \mu \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$k$  为升力系数, 常取 6.46。

$Q = \rho_p q_r$  为两相间的温差引起的能量传递, 其中  $q_r = \frac{c(T - T_p)}{\tau_r}$ ,  
 $\tau_r = \frac{c \bar{\rho}_p d_p^2 P_r}{6c_p \mu N_u}$  为能量弛豫时间。 $Q_r$  为单位质量的颗粒燃烧释放的热。

$\beta$  为分配因子, 表示反应热在两相中的分配。

用 Favre 平均值分解气相守恒方程, 脉动关联系采用 Boassinesq 梯度模拟。于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \Gamma$$

$$\rho \left( \frac{\partial Y_i}{\partial t} + u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + v \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_r}{S_c^*} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + \Gamma_i$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_r) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - V_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -V_y$$

$$\rho \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_r}{P_r^*} \right) \frac{\partial H}{\partial y} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{1}{P_r} \right) \mu + \left( 1 - \frac{1}{P_r^*} \right) \mu_r \right] \frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial y} \right\} + S_q$$

式中的物理量皆表示平均值。 $\mu_r$  可通过 Cebeci-Smith 模型求得 (参见 2.2.2 节)。

颗粒相采用确定颗粒轨迹模型, 故方程的形式不变。

对于稳定激波, 激波坐标中的定常守恒方程为

气相

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \Gamma \quad (8-70)$$

$$\rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{S_c} \right)_{\text{eff}} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right] + \Gamma_i \quad (8-71)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - V_x \quad (8-72)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -V_y \quad (8-73)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{P_r} \right)_{\text{eff}} \frac{\partial H}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu_{\text{eff}} - \left( \frac{\mu}{P_r} \right)_{\text{eff}} \right) \frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial y} \right] + \bar{S}_Q \end{aligned} \quad (8-74)$$

颗粒相

$$\frac{d\rho_p}{dt} = -\Gamma - \rho_p \left( \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) \quad (8-75)$$

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{1}{\rho_p} (V_x + (u_p - u)\Gamma) \quad (8-76)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{\rho_p} (V_y + (v_p - v)\Gamma) \quad (8-77)$$

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{1}{c\rho_p} (Q + S_{Qp}) \quad (8-78)$$

$$\text{其中 } \bar{S}_Q = \Gamma \left( \beta Q_c + cT_p + \frac{(u_c - u_p)^2}{2} - c_p T - \frac{(u_c - u)^2}{2} \right) - Q - u_p V_x - v_p V_y$$

$$S_{Qp} = \Gamma [(1-\beta)Q_c - (u_p - u)(u_p - u_c) - (v_p - v)v_p]$$

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_T, \left( \frac{\mu}{P_r} \right)_{\text{eff}} = \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_T}{P_r^T}, \left( \frac{\mu}{S_c} \right)_{\text{eff}} = \frac{\mu}{S_c} + \frac{\mu_T}{S_c^T}$$

## 二、壁面条件

根据(8-31)式,沉积粉尘的上扬使壁面剪应力下降,即切向速度的法向梯度下降,这导致 Saffman 升力下降,从而抑制粉尘的上扬速率,故为相互制约的过程。结果使壁面剪应力在平衡状态时维持于某阈值,可表示为

$$\tau_w = A \bar{\rho}_p g d_p$$

其中  $A$  为无量纲常数, 表示颗粒所受的剪应力与重力之比, 常取  $A = 0.0064$ 。  $g$  为重力加速度,  $\bar{\rho}_p$  和  $d_p$  为颗粒材料密度和直径。

无颗粒上扬时的壁面摩擦系数由 Mirels 给出<sup>[14]</sup>

$$(\bar{p}_e x)^{\frac{1}{5}} C_{fo} = 4.397 \times 10^{-3} \frac{\left[W + \frac{7}{3}\right]^{\frac{1}{5}}}{(W-1)^{\frac{8}{5}}}$$

代入(8-31)式得

$$\frac{B}{\ln(1+B)} = \frac{2.198 \times 10^{-3} \left(W + \frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{5}} (W-1)^{\frac{8}{5}}}{\tau_w (\bar{p}_e x)^{\frac{1}{5}}} \rho_e u_e^2$$

根据  $B$  的定义式

$$(\rho v)_w = \frac{B \tau_w}{u_e (W-1)} \quad (8-79)$$

设  $(\rho v)_w \approx (\rho_p v_p)_w$ , 对于惰性粉尘, 定常时在  $x=L$  处满足质量守恒方程

$$\dot{M} = \int_0^{s(L)} (\rho_p u_p)_{x=L} dy = \int_0^L (\rho_p v_p)_w dx \quad (8-80)$$

若  $\ln(1+B)$  不随  $x$  变化, 则

$$\frac{\dot{M}}{\rho_e u_e (W-1) \delta} = \frac{5}{8} \frac{C_{fo} x}{\delta} \ln(1+B) \quad (8-81)$$

根据实验, 有经验公式<sup>[15]</sup>

$$\frac{u_{pw} - u_p}{u_w - u_e} = 1 - \frac{\rho_p}{\rho_w} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\frac{\delta}{x} = 0.015$$

由(8-80)式得

$$\frac{\dot{M}}{\rho_p u_e (W-1) \delta} = \frac{\delta}{72} \frac{2W+7}{W-1} \quad (8-82)$$

比较(8-81)式和(8-82)式得

$$\frac{\rho_{pw}}{\rho_e} = 0.675 C_{fo} \ln(1+B) \frac{W-1}{2W+7} \quad (8-83)$$

由(8-79)式和(8-83)式可求得  $v_{\mu v}$ 。

### 三、粉尘卷扬、点火与燃烧

Lees-Dorodnitsyn 变换通常用来处理气体边界层问题<sup>[2]</sup>, 将其推广到带化学反应的两相流边界层时需将气相密度分为两部分<sup>[12]</sup>  $\rho = \rho_l + \rho_c$ , 其中  $\rho_l$  和  $\rho_c$  分别称为固有密度和生成密度, 后者表示两相间的质量传递导致的气相密度变化。因此, 方程(8-70)可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_l u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_l v) = 0$$

$$\rho_l u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho_l v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Gamma$$

其中  $\varphi = \frac{\rho_c}{\rho_l}$ 。引进流函数  $\psi$ , 使  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho_l u$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho_l v$ , 对气相守恒方程进行 Lees-Dorodnitsyn 变换, 其无量纲变量为

$$\xi = \frac{x}{\lambda} \quad \text{和} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_c} d\bar{y}$$

其中  $\lambda = u_\infty \tau_\infty$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{\lambda} \sqrt{R_{e\lambda}}$ ,  $R_{e\lambda} = \frac{\rho_\infty u_\infty \lambda}{\mu_\infty}$ 。无量纲函数为

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{2\xi\lambda} \sqrt{\rho_\infty u_\infty \mu_\infty}}, f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{u_\infty}, \theta = \frac{H}{c_p T_\infty},$$

$$v^* = \frac{v}{u_\infty} \sqrt{R_{e\lambda}}, T^* = \frac{T}{T_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, \rho^* = \frac{\rho_l}{\rho_c}, Y_i^* = \frac{Y_i}{Y_\infty}$$

变换后, 守恒方程为

$$(bf'')' + mff'' + m_1 = 2\xi m \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$\left( \frac{b}{P_r} \theta' \right)' + m_2 \theta' + m_3 = 2\xi m f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$

$$\left( \frac{b}{S_c} Y_i^{*'} \right)' + m f Y_i^{*'} + \omega_i = 2\xi m \left( f' \frac{\partial Y_i^*}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial Y_i^*}{\partial \eta} \right)$$

$$f\varphi' + m_4 = 2\xi \left( f' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \varphi' \right)$$

$$-\sqrt{2\xi}\rho^*r^* = f + 2\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} - \eta f'$$

其中

$$b = \rho^* \mu_{\text{eff}}^*$$

$$m = 1 + \varphi$$

$$m_1 = \frac{1}{\rho^*} \left( \eta \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - 2\xi \frac{\partial p^*}{\partial \xi} - \frac{2\xi\lambda}{\rho_e u_e^2} V_r \right)$$

$$m_2 = (1 + \varphi) \left( f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$m_3 = \frac{u_e^2}{c_r T_e} \left( 1 - \frac{1}{P_r} \right) (bf'f'')' + \frac{2\xi\lambda\bar{S}_0}{\rho_e u_e T_e \rho^* c_r}$$

$$m_4 = \frac{2\xi\lambda}{\rho_e u_e \rho^*} \Gamma$$

$$\omega_1 = \frac{2\xi\lambda}{\rho_e u_e \rho^*} \Gamma_1$$

上述方程可用二阶精度的 BOX 格式求解<sup>[16]</sup>, 颗粒相用修正的 PSIC 格式求解<sup>[12]</sup>。

以沉积玉米粉为算例,  $M_s = 2.97$ ,  $d_p = 30\mu\text{m}$ ,  $\bar{\rho}_p = 2500\text{kg/cm}^3$ 。壁面附近由于  $|u - u_p|$  很小, 故升力  $f_L$  也很小。随颗粒上扬,  $|u - u_p|$  迅速增大,  $f_L$  也增大。至一定高度后, 由于  $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$  迅速降为零, 故  $f_L$  也随之为零。粘性阻力随高度的变化呈类似趋势。

在壁面附近, 升力起主导作用, 故颗粒加速上扬。当颗粒上升至一定位置时, 阻力与升力平衡, 颗粒法向速度取最大值。随后阻力起主导作用使颗粒在法向减速。图 8-1 为颗粒法向速度随飞行高度的变化曲线, 该曲线反映了上述趋势。

颗粒的化学反应速率随温度的升高而升高, 且在某温度附近发生突跃, 此现象称为点火, 相应的温度叫点火温度。颗粒点火前, 化学反应极其缓慢, 点火后变得异常激烈。被卷扬的颗粒在高温气体中受热, 经一段点火延迟后开始燃烧, 其值可通过测试激波阵面和火焰阵面到达某一固定位置的时间差来确定。理论计算时, 则须

给出点火判据。颗粒反应释放的热在两相中的分配,即分配因子 $\beta$ ,对颗粒燃烧过程的影响极大。图 8-2 为不同分配因子的颗粒直径变化曲线。显然,这些曲线在某点明显分叉,可将分叉点取为点火点,对应的点火判据为 $\frac{d_{f_0}-d_f}{d_{f_0}}=0.001$ 。

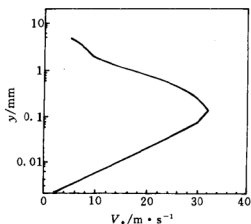


图 8-1 颗粒上升速度的变化曲线

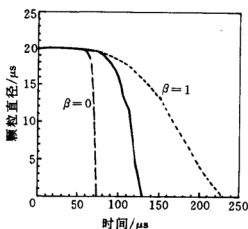


图 8-2 分配因子对颗粒直径变化的影响



壁面可燃粉尘被激波卷扬点火后在粉尘云内燃烧,激波坐标中燃烧区域为一外形不变的带状预混火焰,它位于壁面上方,激波愈强,火焰阵面愈接近于激波阵面和壁面。计算表明燃烧粉尘云可分为三个区域:诱导区,火焰区和扩散区。颗粒离开壁面后经诱导区加热在火焰区点火燃烧最后在反应区与扩散区的交界处烧完。由于反应区的温度、氧气浓度等气相参数不等于主气流的值,故存在一块梯度较大的扩散区用来调节流场参数。图 8-3 为燃烧粉尘云内氧气质量分数、气相温度和颗粒温度的等值线,它反映了粉尘云的内部结构。

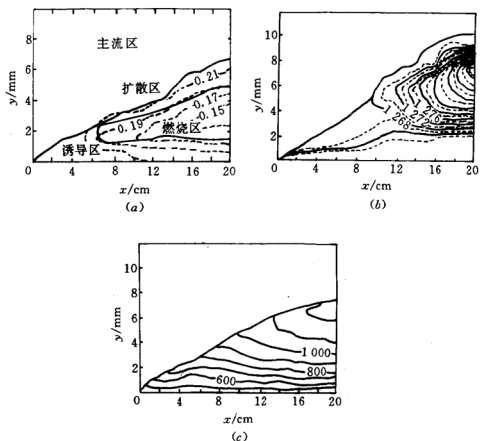


图 8-3 激波诱导的燃烧粉尘云的内部结构

(a) 氧气质量分数等值线; (b) 气相温度等值线; (c) 颗粒温度等值线。

### 8.3.2 Chapman-Jouguet 条件<sup>[10]</sup>

激波坐标中,定常流的守恒方程为

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \Gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j - \pi_{ij}) = \Gamma u_j - V_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho u_i H - u_i \tau_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = H \Gamma + \bar{S}_Q$$

在截面上取平均值,于是

$$(B_1 \rho u)' = \frac{A_1}{L} \quad (8-84)$$

$$p' + (B_2 \rho u^2)' = \frac{A_2}{L} \quad (8-85)$$

$$\left[ B_3 \left( \frac{1}{2} \rho u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p u \right) \right]' = \frac{A_3}{L} \quad (8-86)$$

其中  $B_1 = 1 - \frac{\delta^*}{L}$ ,  $B_2 = 1 - \frac{\theta + \delta^*}{L}$  和  $B_3 = 1 - \frac{\theta_H - \delta^*}{L}$  分别表示边界层对质量、动量和能量方程的影响。

$A_1 = \int_0^L \Gamma dy$  表示两相间的质量传递。

$A_2 = \int_0^L (u\Gamma - v_z) dy - \tau_w$ , 其中  $\int_0^L (u\Gamma - v_z) dy$  表示两相间的质量传递和摩擦导致的动量传递,  $\tau_w$  表示壁面摩擦造成的动量损失。

$A_3 = \int_0^L (H\Gamma + \bar{S}_Q) dy - u_w \tau_w + q_w$ , 其中  $\int_0^L (H\Gamma + \bar{S}_Q) dy$  表示两相间的能量传递, 包括化学反应、两相间的质量传递、摩擦和热传导等因素,  $u_w \tau_w$  和  $q_w$  表示壁面的摩擦和热传导导致的能量变化。

设  $C-J$  面附近  $B_i = \text{常数}$ , 由 (8-84) 式 ~ (8-86) 式得

$$\frac{\gamma L}{\gamma-1} p [B_1 M^2 - 1] u' = \frac{\gamma}{\gamma-1} u B_2 (G_2 - u G_1) - G_3 + \frac{1}{2} u^2 G_1 \quad (8-65)$$

其中  $G_1 = \frac{A_1}{B_1}, G_2 = \frac{A_2}{B_2}, G_3 = \frac{A_3}{B_3}, B_4 = 1 - \frac{(\theta + \delta^*)\gamma}{L}$ 。欲使该式有解,必有

$$M^2 = \frac{1}{B_4} \text{ 时 } \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} u B_2 (G_2 - u G_1) - G_3 + \frac{1}{2} G_1 u^2 = 0 \quad (8-66)$$

此条件称为  $C$ - $J$  条件。由于  $C$ - $J$  面上  $u^2 = \frac{\gamma p}{B_4 \rho}$ , 故

$$p = \frac{F_2 B_4}{\gamma B_2 + B_4}$$

$$u = \frac{2 F_3 B_4 (\gamma - 1)}{\gamma p B_3 (\gamma - 1 + 2 B_4)}$$

$$\rho = \frac{\rho_0 u_w + \frac{\tilde{A}_{1j}}{L}}{B_1 u}$$

其中

$$\tilde{A}_{1j} = \int_0^x \int_0^L \Gamma dy dx$$

$$\tilde{A}_{2j} = \int_0^x \int_0^L (u \Gamma - V_x) dy dx - \tau_w x_j$$

$$\tilde{A}_{3j} = \int_0^x \int_0^L (H \Gamma + S_Q) dy dx - u_w \tau_w x_j + q_w x_j$$

$$F_2 = \rho_0 u_w^2 + p_0 + \frac{\tilde{A}_{2j}}{L}$$

$$F_3 = \rho_0 u_w H_w + \frac{\tilde{A}_{3j}}{L}$$

脚标  $j$  表示  $C$ - $J$  面上的值。计算过程中  $\delta^*, \theta, \theta_H, A_1, A_2, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$  等皆可通过前节的数值计算求得。图 8-4 为  $C$ - $J$  爆速与颗粒注入量的关系曲线。

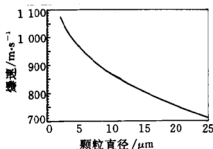


图 8-4 粉尘薄膜爆轰的  $C$ - $J$  爆速与颗粒注入量的关系曲线

## 参 考 文 献

### 第 一 章

- 1 Fickett W and Davis W C. Detonation. Univ of California Press. 1979
- 2 Kuo K K. Principles of Combustion. Wiley. 1986
- 3 周力行. 燃烧理论和化学流体力学. 北京: 科学出版社, 1986
- 4 Hines A L and Maddox R N. Mass Transfer. Prentice-Hall. Inc. 1985
- 5 Matkowsky B J and Sivashinsky G I. SIAM. J. Appl. Math 37:686, 1979
- 6 Williams F A. Combustion Theory. Addison-Wesley. 1965
- 7 Matalon M and Matkowsky B J. J. Fluid Mech. 24:239, 1982
- 8 Clarke J F. Prog. Energy Combust Sci 15:241, 1989
- 9 Gruska H D and Wecken F. Gasdynamic Theory of Detonation. Sci. Pub. Inc. 1971
- 10 Strehlow R. Combust Flame 24:257. 1975

### 第 二 章

- 1 Schlichting H. Boundary Layer Theory. McGraw-Hill. 1979
- 2 Panchev S. Random Functions and Turbulence. Pergamon Press. 1971
- 3 Kuo K K. Principles of Combustion. John Wiley & Sons. 1986
- 4 Chen J C. Prediction of Turbulent Flows. Lecture note in Abiko City. Japan. 1983
- 5 Launder B E and Spalding D B Mathematical Models of Turbulence. Academic Press. 1972
- 6 Cebeci T and Smith AMO. Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press. 1974
- 7 Chomick J. Prog Energy Combust Sci 5:202. 1979
- 8 Monin A S and Yaglom A M. Mechanics of Turbulence, Cambridge Mass. , 1975
- 9 Spalding D B. Chem Eng Sci 26:95. 1971
- 10 Lockwood F C and Naguib A S. Combust. Flame 24:109, 1975
- 11 周力行. 湍流两相流动与燃烧的数值模拟. 北京: 清华大学出版社, 1991
- 12 Spalding D. B. 16th Symp on Comb. p1657. 1976
- 13 Ballal D R and Lefebure A. H. Proc. Ray. Soc A 334:217, 1975
- 14 Bray K N C and Moss J B. Acta Astron. 4:291, 1977
- 15 Bray K N C 17th Symp on Comb. p233, 1978

## 第三章

- 1 Soo S L. Multiphase Fluid Dynamics. Sci Press. 1990
- 2 Truesdell C T. Rational Thermodynamics. McGraw-Hill, 1984
- 3 Drew D A and Segel L A. Stud. Appl. Mech. 50:205, 1971
- 4 Rudinger G. Fundamental of Gas-Particle Flow. 1980
- 5 Rudinger G. AIAA. J. 3:1217, 1965
- 6 Schlichting H. Boundary Layer Theory. McGraw-Hill, 1979
- 7 Chao B T. Phys Fluids. 5:69, 1962
- 8 Rabin E et al. Displacement and Shattering of Propellant Droplets. AFOSR TR60-75. 1960
- 9 Putnam A. ARS. J. 31:1467, 1961
- 10 Dickerson R A and Schuman M D. J. Space craft. p99, 1960
- 11 Dorrance W H. Viscous Hypersonic Flow, McGraw-Hill. 1962
- 12 Langhear H L. Dimensional Analysis and the Theory of Models Wiley. 1951
- 13 Friedlander S K. AIChE. J. 3:43, 1957
- 14 Drake R M Jr. J. Heat Transfer. Trans. ASME. 83:170, 1961
- 15 Ranz W and Marshall W R. Prog Chem Eng 48:147, 1952
- 16 Spalding D B. Fuel 132:169, 1953
- 17 Sparrow E M. Radiation Heat Transfer. Pleum Press. 1978
- 18 Szekely J. Evans J W and Sohn H Y. Gas-Solid Reactions. Academic Press. 1976
- 19 Kuo K K. Principles of Combustion John Wiley & Sons. 1986
- 20 Faeth G M. Prog. Energy Combust. Sci 3:224, 1977
- 21 Faeth G M. Prog. Energy Combust. Sci 9:1, 1983
- 22 Faeth G M. Prog. Energy Combust. Sci 13:293, 1987
- 23 Shearer A J. Tamma H and Faeth G. M. J of Energy 3:271, 1979
- 24 Kraziusky J L. Buckins R O and Krier H. Prog Energy Combust. Sci 5:31, 1979
- 25 Williams A. Combust. Flame 21:1, 1973
- 26 王竹溪. 统计物理学导论, 北京:人民教育出版社, 1978
- 27 Crowe C T. Sharma M P and Stoke D E. J. Fluids Eng 99:325, 1971
- 28 Shuen J S. Chen L D and Faeth G M. AIChE. J. 29:167, 1983
- 29 Spalding D B. Basic Two-Phase Flow Modeling in Reactor Safety and Performance. EPRI Workshop Proceedings. 1980
- 30 周力行. 湍流两相流动与燃烧的数值模拟. 北京:清华大学出版社, 1991

## 第四章

- 1 Cussler E L. Diffusion. Cambridge University Press. 1984
- 2 Adamson A W. A Textbook of Physical Chemistry. Academic Press. 1973
- 3 Hirschfelder J O. Curtis C F and Bird R B. Molecular Theory of Gases and Liquids. Wiley. 1954
- 4 Chapman S and Cowling T G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. Cambridge University Press. 1970
- 5 Toong T Y. Combustion Dynamics. Mc Graw-Hill Inc. 1983
- 6 Law C K. Combust. Flame 26;17. 1976
- 7 Law C K. Chung S H and Srinivasam N. Combust. Flame 38;173, 1980
- 8 Law C K. Combust. Flame 26;219, 1976
- 9 Law C K and Law H K. AIAA. J. 20;522, 1982
- 10 Potter J N and Riley N. Combust. Flame 39;83, 1980
- 11 Prakash S and Sirignano W A. Int. J. Heat Mass Transfer 2;253, 1980
- 12 Tong A Y and Sirignano W A. 19th Symp on Comb. p1007, 1982
- 13 Whitman W G. Chem Met Eng 29;146. 1923
- 14 Spalding D. B. ARS. J. pp828-835, 1959
- 15 Rosner D E. AIAA. J. 15;163, 1967

## 第五章

- 1 Wheeler A. Advance in Catalysis, Vol I. Academic Press Inc. 1951
- 2 Scott D S and Dullien FAL. AIChE. J. 18;113, 1961
- 3 Gunn R D and King C J. AIChE. J. 15;507. 1968
- 4 Masson E A. Malinauskas A P and Evans R B. J. Chem Phys 46;3199, 1967
- 5 Satterfield C N. The Role of Diffusion in Catalysis. Addison Wesley Publishing Inc. 1963
- 6 Petersen E. Chemical Reaction Analysis. Prentice-Hall, Inc. 1965
- 7 Szekely J. Evans J W and Sohn H Y. Gas-Solid Reactions. Academic Press. 1976
- 8 Wick E. 5th Symp on Comb. p245. 1955
- 9 Petersen E E. AIChE. J. 3;443, 1957
- 10 Sohn H Y and Szekely J. Chem Eng Sci 27;763, 1972
- 11 Sohn H Y and Szekely J. Chem Eng Sci 28;1169, 1973
- 12 Ausman J M and Watson C C. Chem Eng Sci 17;323. 1962
- 13 Ishida M and Wen C Y. AIChE. J. 14;311, 1968
- 14 Evans J W. Ph. D. Dissertation. SUNY at Buffalo. 1970

- 15 Anthony D B and Howard J B. *AIChE. J.* 22; 625, 1976
- 16 Anthony D B, Howard J B, Hottel H C and Meissner H p. 15th Symp on Comb p1303. 1974
- 17 Markstein G H. 11th Symp on Comb. p219. 1966
- 18 Ogle R A, Beddow J K, Chen L D. *Comb. Sci. Tech* 61; 159. 1988
- 19 Cassel H M. Some Fundamental Aspects of Dust Flames Rep. Inv 6551. U S Bureau of Mines. Washington. 1964
- 20 Law C K. *Comb. Sci. Tech* 7; 197, 1973

## 第 六 章

- 1 Frank-Kamenetskii D A. The Temperature Distribution in a Reaction Vessel and the Stationary Theory of Thermal Explosions. *zh. Fiz. khim* 13; 738. 1939
- 2 Semenov N N. Toward a Theory of Combustion Processes Part I. *Zhurn. Rus Fiz. Khim. Ova.* 60; 247. 1928
- 3 Zeldovich Ya B et al. The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. Consultants Bureau. 1985
- 4 Petersen. E. Chemical Reaction Analysis Prentice-Hall. Inc. 1965
- 5 Sivaskinsky G I. *Acta Astron.* 6; 631. 1979
- 6 Sivaskinsky G I. *Acta Astron.* 3; 889. 1976
- 7 Bush W B and Fendell F E. *Comb. Sci. Tech* 1; 421. 1970
- 8 Hertzberg M, Cashdollar K L and Zlochower I A 21th Symp on Comb pp303-313. 1988
- 9 Ramos J I. *AIAA. J.* 21; 415. 1983
- 10 Eckhoff R K. Dust Explosions in the Process Industries. Butterworth-Heinemann Ltd. 1991
- 11 Amyotte P R, Chippett S and Pegg M J. *Prog Energy Combust Sci* 14; 293. 1988
- 12 Raftery M M. *Chem Processing* 20; 55. 1974
- 13 Ogle R A, Beddow J K, Chen L D and Butter P B. *Comb. Sci. Tech* 61; 75. 1988
- 14 范宝春, 丁大玉, 浦以康, 汤明钧. 球型密闭容器中铝粉爆炸机理的研究. 爆炸与冲击. vol 14. No2. pp148—156. 1994
- 15 Abdel-Gayed, Bradley R G and McMahon M. 17th Symp on Comb. p245. 1979
- 16 Ozisik M N. Radiative Transfer, Wiley. 1973
- 17 Continillo G. *Archivum Combustion* 9; 79. 1989
- 18 Aggrawal S K and Sirignano W A. *Computer and Fluids* 12; 145. 1984
- 19 Seth B and Aggrawal S K and Sirignano W A *Combust. Flame* 39; 149, 1980
- 20 Law C K, *Combust. Flame* 26; 17, 1976

- 21 Kuhl A L, Kamel M M and Oppenheim A K. 14th Symp on Comb. p1201. 1973
- 22 Oppenheim A K, Lundstrom E A, Kuhl A L and Kamel M M. J. Fluid Mech 52:657. 1972
- 23 Sedov L. I. Similarity and Dimensional Method in Mechanics. Academic Press. 1959
- 24 Adamson A W. A Textbook of Physical Chemistry Academic Press Inc. 1973
- 25 Chern I L, Glimm J, McBryan O, Plohr B, and Yaniv S. J. Comp Phys 62:83, 1986
- 26 范宝春, 黄昌超, 李鸿志. 粉尘火焰诱导激波现象的研究. 中国安全科学学报, 1995
- 27 Lurkritz R T, An Investigation of Blast Waves Generated by Constant Velocity Flames. ph. D. Thesis. University of Maryland. 1977
- 28 Oppenheim A K. Elementary Blast Wave Theory and Computations. Proc of Conference on Mechanisms of Explosions and Blast Waves. 1973
- 29 Van den Berg A C. "Blast", A One-Dimensional Flame Speed Blast Simulation Code Using a Flux-Corrected Transport Algorithm PML 1980—162. Prins Maurits Lab TNO. Rijswijk. The Netherlands.
- 30 Van Wingerden C J M. Van den Berg A C and Zeenwen J P Prog. Astron. Aero. 106: 422. 1986
- 31 Pickles J H. Combust, Flame 44:153, 1982
- 32 Taylor G I. Proc. Roy Soc. A248:333. 1958
- 33 Chan C, Moen I O and Lee J. H. S. Combust. Flame 49:27. 1983
- 34 Bradley D and Mitcheson A M. Combust. Flame 32:221. 1978
- 35 Bradley D and Mitcheson A M. Combust. Flame 32:237. 1978
- 36 Lefebvre A H and Reid R. Combust. Flame 10:335. 1966
- 37 Bray KNC. Turbulent Flow with Premixed Reactions in "Turbulent Reacting Flows". Springer-Verlay. 1970
- 38 Hiertager B H. Comb. Sci. Tech 27:159. 1982
- 39 Hiertager B H. Modeling, Identification and Control 10:227, 1989
- 40 Van den Berg A C. REAGAS—a Code for Numerical Simulation of 2-D Reactive Gas Dynamics. TNO Prins Maurits Lab. Rep NO PML 1989—IN—48

## 第七章

- 1 Rudinger G. Relaxation in Gas Particle Flow. Marcel Dekker. 1970
- 2 Kopotev V A and Kuznetsov N M. Combustion Explosion and Shock Waves 22:94, 1985
- 3 范宝春, 汤明钧. 两相爆轰波的松弛结构. 力学学报 24:556. 1992
- 4 Fishburn B D. Acta Astron 1:1267. 1974
- 5 Ranger A A and Nicholls J A. AIAA. J. 7:285. 1967



- 6 Krauss W E. Water Drop Deformation and Fragmentation due to Shock Wave Impact. Ph. D. Thesis. University of Florida. 1970
- 7 王继海. 二维非定常流和激波, 北京: 科学出版社. 1994
- 8 Borisov A A et al. Fuel-Air Explosions. Final Report. Institute of Chemical Physics. Russian Academy of Science 1994
- 9 Gordon G D. J. Appl. Phys. 30; 1759. 1959
- 10 Ranger A A and Nicholls J A. AIAA. J. 7; 285. 1969
- 11 Engel. O G. J. NBS. 60; 245. 1958
- 12 Oran E S. 18th Symp on Comb. p1641. 1980
- 13 Dabora E K, Ragland K W and Nicholls J A. Phys Fluid 11; 2377. 1968
- 14 Dabora E K. Acta Astron 6; 269. 1979
- 15 Sedov L I. Similarity and Dimensional Method in Mechanics. Academic Press. 1959
- 16 Pierce T H. Experimental and Theoretical Study of the Structure of Two-Phase Detonation in Sprays. ph. D. Thesis. University of Michigan. 1972
- 17 范宝春, 姚海霞, 李鸿志. 气云爆轰的一维模型. 爆炸与冲击. vol 15. No4 1995
- 18 Eidelman S and Burcat A. J. Comp Phys. 39; 451. 1981
- 19 Borisov A A et al Acta Astron 15; 411. 1970
- 20 Baochun F (范宝春) and Sichel M. 22th Symp on Comb. p1741. 1988
- 21 Sichel M. Prog. Astron. Aero 135; 147. 1991
- 22 范宝春. 可燃颗粒悬浮流中的正激波. 爆炸与冲击. vol 10. No3. p257. 1990
- 23 Veyssiere B and Khasainov B A. Combust. Flame 85; 241. 1991
- 24 Afanasieva L A, Levin V A and Tunik Y V Prog. Astron. Aero. 87; 394. 1981
- 25 Veyssiere B. Prog. Astron. Aero 106; 522. 1985
- 26 Khasainov B A and Veyssiere B. Prog. Astron. Aero. 114. 284. 1988

## 第 八 章

- 1 Dorrance W H. Viscous Hypersonic Flow. McGraw-Hill Inc. 1962
- 2 Schlichting H. Boundary Layer Theory. McGraw-Hill Inc. 1979
- 3 Sichel M. Rao C S and Nicholls J A. 13th Symp(Intl) on Comb pp1141-1149. 1970
- 4 Fujitsuna Y and Tsuge S. Acta Astron. 6; 1265. 1979
- 5 Rao C S R, Sichel M and Nicholls J A. Comb. Sci. Tech 4; 209, 1972
- 6 Marxman G A. 10th Symp (Intl) on Comb. pp1337-1349. 1964
- 7 Hartunian R A, Russo A L and Marrone P V. J. Aero Sci 27; 587. 1960
- 8 Mirels H. Boundary Layer Research (H. Görtler, Ed. ) p283. 1957
- 9 Mirels H. AIAA. J. 22; 1042. 1984

- 10 范宝春, 陆守香, 龚昌超. 激波与壁面粉尘相互作用的数值模拟. 空气动力学学报 vol 13; 99. 1995
- 11 范宝春, 陆守香, 龚昌超, 李鸿志. 激波诱导的燃烧粉尘云边界层的结构. 力学学报 vol 27. No6. 1995
- 12 范宝春, 陆守香, 李鸿志. 激波作用下粉尘卷扬、点火与燃烧的数值研究. 空气动力学学报, 1996(录用待发表)
- 13 Owen P. R. J. Fluid Mech 20; 255. 1964
- 14 Mirels H. AIAA. J. 22; 1582. 1984
- 15 Cebeci T and Bradshaw P. Momentum Transfer in Boundary Layers. Hemisphere Publishing Corporation. 1977